Подготовка к итоговым и текущим аттестациям по алгебре в основной школе.

Формирование умений выполнения заданий функциональной линии в курсе алгебры на примере УМК по алгебре для 7-9 классов Никольского С.М.

ПРОСВЕЩЕНИЕ

Единая система оценки качества образования

ГИА
Государственная итоговая аттестация
9 и 11 классы

ВПР
Всероссийские проверочные работы

НИКО
Национальные исследования качества образования

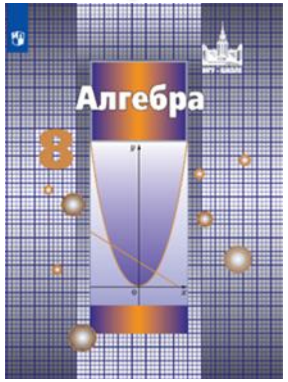
МИ
Международные исследования

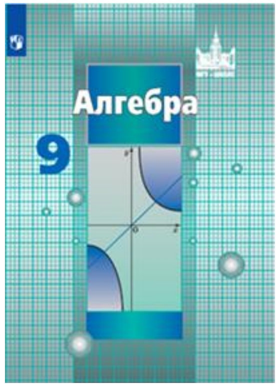
Общероссийская оценка по модели PISA
Приказ МИНПРОСВЕЩЕНИЯ N 219, РОСОБРНАДЗОРА приказ N 590, от 06.05.2019

Учебно-методический комплект по математике 5-11 классы. Авторы: С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин

С.М. Никольский

- Завершённая линия учебников для основной и старшей школы.
- Подача учебного материала крупными модулями.
- Выделение основных методов решения уравнений и неравенств.





Структурные особенности учебников

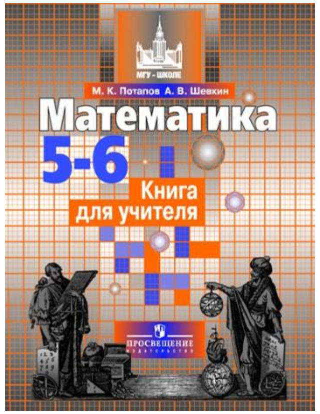
УМК для 5-6 классов

- Подача материала крупными модулями и решение текстовых задач в 5-м классе только арифметическими способами.
- Структура изложения материала позволяет формировать не только хорошие вычислительные навыки, но развивать математическое мышление учащихся.
- Система упражнений позволяет осуществить дифференцированный подход к обучению, в системе упражнений выделены рубрики по видам деятельности.

УМК для 7-9 классов

- Подача материала крупными модулями, без лишних повторов, что помогает сделать изложение даже сложных вопросов ясным и доступным.
- Основной методический принцип учебника: ученик за один раз должен преодолевать не более одной трудности.
- Система задач, разбитых на рубрики, помогает учащимся ориентироваться в способах деятельности и осуществлять дифференцированный подход к обучению.
- Каждая глава дополняется историческими сведениями и заданиями на исследования.

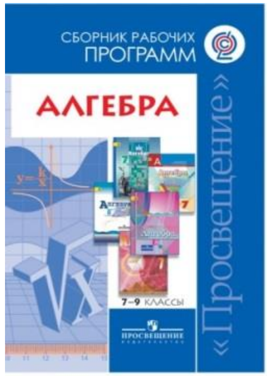
Состав УМК по математике для 5-6 классов.
Авторы: С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин

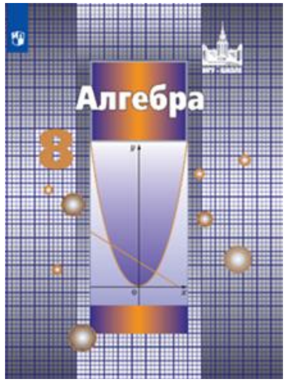


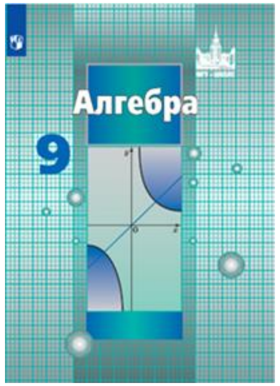
Учебно-методический комплект по алгебре 7-9 классы. Авторы: С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин

В состав УМК входят:

- учебники (бумажные),
- рабочая программа,
- тематические тесты,
- дидактические материалы,
- методические пособия (размещены на сайте издательства),
- электронная форма учебников

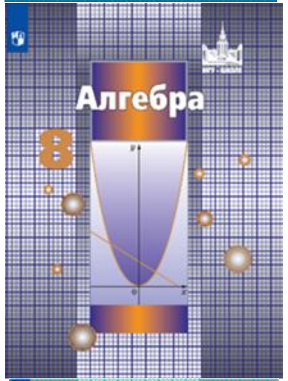






Состав УМК по алгебре для 7-9 классов,
алгебре и началам математического анализа для 10-11 классов.
Авторы:
С.М. Никольский,
М.К. Потапов,
Н.Н. Решетников,
А.В. Шевкин

Структурные и методические особенности учебников



Авторская концепция курса заключается в том, что учитель оставляет за собой право регулировать степень углубления в теоретический материал, использование дополнительного материала и сложных задач с учётом уровня подготовки класса и целей обучения.

Учебники линии УМК «Никольский 7-9» ориентированы на:

- формирование теоретического мышления и простейших доказательных умений,
- вычислительных умений, опирающихся на понимание смысла выполняемых действий, а не на схожесть алгоритмов вычислений,
- на развитие речи учащихся в изучении арифметики и алгебры,
- на формирование и развитие универсальных учебных действий,
- развитие мышления через решение текстовых задач арифметическими способами, умения делать логически правильные выводы на основе анализа данных задачи и использовать эти данные для её решения.

Структурные и методические особенности учебников

- Задания на поиск информации способствуют расширению кругозора, развитию мотивов познавательной деятельности школьников.
- В системе упражнений выделены задания для устной работы, старинные задачи и задания более высокого уровня сложности.
- Система упражнений позволяет осуществить дифференцированный подход. Сложность заданий нарастает линейно, при этом на отработку каждого нового приёма решения задач даётся достаточное количество упражнений, которые не перебиваются упражнениями на другие темы.

611. **Ищем информацию.** а) Используя учебник, справочную литературу и Интернет, найдите примеры применения стандартного вида числа в физике, астрономии и других науках.
б) Используя учебник, справочную литературу и Интернет, найдите объяснение происхождения термина «нанотехнологии».

1. Какие числа называют натуральными? Является ли 0 натуральным числом?
2. Каким числом является сумма натуральных чисел?
3. В каком случае разность натуральных чисел есть натуральное число?
4. Каким числом является произведение натуральных чисел?
5. Всегда ли выполнимо деление натуральных чисел нацело?
6. На какие натуральные числа делится нацело любое натуральное число?
7. Делятся ли нацело на 7 числа: 12, 27, 42, 126?

511. *Задача аль-Караджи (Иран, XI в.).* Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

512. *Задача аль-Каши (XIV—XV вв.).* Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n).$$

513. *Задача Фаульхабера (Германия, 1580—1635).* Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{12}(2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2).$$

17. Натуральное число n делится на натуральное число p ($p > 1$). Докажите, что число $n + 1$ не делится на p.

18. Выписали первые 99 натуральных чисел: 1, 2, ..., 99. Запятые стёрли и получили натуральное число.
а) Сколько раз в записи этого числа встречается цифра: 0, 1, 2, 3, ..., 9?
б) Делится ли это число на 9?

19. Произведение первых n ($n \geqslant 2$) натуральных чисел обозначают $n!$ и читают «эн факториал»: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.
Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
На сколько нулей оканчивается:
а) $10!$; б) $50!$; в) $100!$?

Структурные и методические особенности учебников

- Перед каждой главой есть преамбула, задающая цель работы с новым материалом и определяющая его значимость при изучении других учебных предметов.
- Продуманная авторами система задач позволяет осуществлять межпредметные связи с геометрией, историей, химией, физикой, астрономией и экономикой.
- Наличие исторических сведений и старинных задач способствует формированию представления о вкладе России и других стран в мировое наследие.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$

ГЛАВА 3

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

При изучении материала главы 3 вам предстоит познакомиться с последовательностями, способами их задания и свойствами, изучить арифметическую и геометрическую прогрессии, их свойства и формулы, связанные с ними. Арифметическая и геометрическая прогрессии не только связаны с красивыми задачами и легендами прошлого (легенда о шахматной доске), но и позволяют изучать часто встречающиеся на практике процессы.

§ 6. Числовые последовательности и их свойства

6.1. Понятие числовой последовательности

Если каждому натуральному числу n ($n = 1, 2, \ldots$) поставлено в соответствие по некоторому закону число x_n, то говорят, что задана последовательность чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \qquad (1)$$

или, короче, задана **числовая последовательность** $\{x_n\}$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называют **членами последовательности**, а член с номером n — её **n-м членом**, его ещё называют **общим членом**.

Задать последовательность — это значит указать закон, по которому можно вычислить её n-й член x_n для каждого натурального n.

Этот закон может выражаться разными способами: формулами, словесными описаниями и т. п.

Рассмотрим числовую последовательность, n-й член которой задан формулой

$$x_n = n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (2)$$

Пользуясь этой формулой, можно вычислить любой член последовательности (2), соответствующий данному конкретному номеру n. Например:

$x_4 = 4^2 = 16, \quad x_{12} = 12^2 = 144, \quad x_{17} = 17^2 = 289.$

824. а) Парсек (единица длины, принятая в астрономии) равен 30 860 000 000 000 км. Запишите это число с помощью степени числа 10.

б) Если разрезать кубический метр на кубические сантиметры и поставить их друг на друга, то какой высоты получится столб?

825. а) Между единицами энергии существует следующая зависимость: 1 джоуль равен 10^7 эргам, а 1 киловатт-час равен $3{,}6 \cdot 10^6$ джоулям. Выразите 1 киловатт-час в эргах.

б) В одном грамме воды содержится $3{,}35 \cdot 10^{22}$ молекул. Сколько цифр в десятичной записи этого числа?

254

3. Исторические сведения

Изучение математических рукописей Древнего Египта и Вавилона показывает, что ещё в глубокой древности возникли некоторые приёмы приближённых вычислений. Под влиянием развития астрономии, мореплавания и техники методы приближённых вычислений совершенствовались.

Большие заслуги в развитии теории приближённых вычислений имеет российский академик Алексей Николаевич Крылов (1863—1945), который писал: «Во всех справочниках, как русских, так и иностранных, рекомендуемые приёмы численных вычислений могут служить образцом, как эти вычисления делать не надо... Вычисление должно производиться с той степенью точности, которая необходима для практики, причём всякая неверная цифра составляет ошибку, а всякая лишняя цифра — половину ошибки».

Чтобы в приближённых вычислениях можно было из самой записи приближённого числа судить о степени его точности, А. Н. Крылов предложил следующее правило: «Приближённое число следует записать так, чтобы все цифры, кроме последней, были бы надёжными», т. е. верными.

А. Н. Крылов был не только видным математиком, но и выдающимся механиком-кораблестроителем, сделавшим ряд важнейших технических открытий.

В настоящее время приближённые вычисления используются для расчёта полётов космических аппаратов, в подготовке прогноза погоды и т. п. Эти расчёты ведутся с помощью ЭВМ.

Термин «статистика» введён в науку в XVIII в. Однако статистический учёт вёлся намного раньше: проводились переписи населения в Древнем Китае, осуществлялось сравнение военного потенциала государств, вёлся учёт имущества граждан в Древнем Риме и т. п. Первой опубликованной статистической информацией можно считать глиняные таблички Шумерского царства (III—II тысячелетия до н. э.).


А. Н. Крылов

Вначале под статистикой понимали описание экономического и политического состояния государства или его части. Например, к 1792 г. относится определение: «статистика описывает состояние государства в настоящее время или в некоторый известный момент в прошлом». Однако постепенно термин «статистика» стал использоваться более широко. По словам Наполеона Бонапарта, «статистика — это бюджет

Структурные особенности учебников

- Умение выполнять контроль, самоконтроль и коррекцию деятельности формируется при выполнении заданий рубрики «Задания для самоконтроля».
- В конце каждого учебника размещён раздел «Задания на исследование».
- Деятельностный подход реализуется заданиями с указанием на выполняемые действия: «Исследуем», «Доказываем», «Ищем информацию».

Задания для самоконтроля

1. Расположите в порядке убывания числа: –16,7; –17,6; –17,06; –17,76.
2. Расположите выражения в порядке возрастания их значений. В ответе укажите последовательность их номеров.
   1) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$ 3) $\frac{0{,}9}{4}$ 4) $0{,}48 \cdot 0{,}25$
3. Три тетради и две ручки стоят 24 р. Сколько стоит тетрадь, если она на 2 р. дешевле ручки?
   Пусть тетрадь стоит x р. Какое уравнение соответствует условиям задачи?
   1) $3(x-2)+2x=24$ 2) $3x+2(x+2)=24$
   3) $3(x+2)+2x=24$ 4) $3x+2(x-2)=24$
4. От города до посёлка автомобиль доехал за 3 ч. Если бы его скорость была на 25 км/ч выше, он затратил бы на этот путь на 1 ч меньше. Чему равно расстояние от города до посёлка?
   Пусть x км — расстояние от города до посёлка. Какое уравнение соответствует условию задачи?
   1) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=25$ 2) $\frac{x}{3}-\frac{x}{2}=25$
   3) $\frac{2}{x}-\frac{3}{x}=25$ 4) $\frac{3}{x}-\frac{2}{x}=25$
5. Группа из двенадцати детей и двоих взрослых идёт на экскурсию в музей. Взрослый билет стоит 200 р. Билет для школьника продаётся со скидкой 50%. Сколько нужно заплатить за билеты для всей группы? Ответ дайте в рублях.
6. Суточная норма потребления углеводов составляет 280 г. Порция омлета в среднем содержит 39 г углеводов. Сколько примерно процентов от суточной нормы потребления углеводов получит человек, съев порцию омлета?
   1) 7% 2) 0,7% 3) 14% 4) 0,14%
7. Площадь территории России составляет $1{,}7 \cdot 10^7$ км², а Германии — $3{,}6 \cdot 10^5$ км². Во сколько раз площадь территории России больше площади территории Германии?
   1) примерно в 2,1 раза 2) примерно в 470 раз
   3) примерно в 4,7 раза 4) примерно в 47 раз
8. В каком случае преобразование выполнено верно?
   1) $(4-b)(b+4)=b^2-16$
   2) $-(b-1)(3-4b)=(1-b)(4b-3)$
   3) $(b+1)(3-2b)=3+b-2b^2$
   4) $(b-4)^2=b^2-4b+16$

631. **Исследуем.** а) С помощью треугольника Паскаля запишите в стандартном виде шестую и седьмую степень двучлена $(a+b)$.
б) Убедитесь, что сумма чисел n-й строки треугольника Паскаля равна 2^n. Выполните проверку от $n=1$ до $n=10$.

632. **Ищем информацию.** а) Используя справочную литературу и Интернет, выясните, когда и у каких народов появились первые упоминания об арифметическом треугольнике и как он называется в Иране, в Китае. Какими ещё свойствами обладают числа треугольника Паскаля?
б) Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение об И. Ньютоне и о задачах его «Всеобщей арифметики».

Задания на исследование

1. *Задача Ариабхаты (476 — ок. 550).* Два лица имеют равные капиталы, причём каждый состоит из известного числа вещей одинаковой стоимости и известного числа монет. Но как число вещей, так и суммы денег у каждого различны. Какова ценность вещи?
   Указание. Считайте, что у первого лица a вещей и b монет, а у второго лица c вещей и d монет ($a \neq c$ и $b \neq d$).
2. Число 20 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы их произведение оказалось наибольшим.
3. Найдите число, которое даёт наименьшую сумму со своим квадратом.
4. Число 18 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма удвоенного первого из них и квадрата второго была наименьшей.
5. Число 16 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма кубов этих слагаемых оказалась наименьшей.
6. Проволока длиной 100 см согнута так, что получился прямоугольник наибольшей возможной площади. Определите его размеры.
7. В понедельник акции компании A подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же число процентов. В результате они стали стоить на 16 % дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На какое число процентов подорожали акции компании A в понедельник?
8. Заработная плата некоторой категории служащих повышалась два раза, причём процент повышения во второй раз был в два раза больше, чем в первый раз. Определите, на сколько процентов повышалась зарплата каждый раз, если до первого повышения зарплата была 1400 р., а после второго повышения составила 1848 р.
9. Два брата купили акции разных компаний на равные суммы. В понедельник акции старшего брата подорожали, а акции младшего брата подешевели на p %. Во вторник акции старшего брата подешевели, а акции младшего брата подорожали на q %. Чьи акции после торгов во вторник стоили дороже, если: а) $p = q$; б) $p > q$?
10. Инвестор купил 171 акцию известной компании по 342 р. за штуку. Через некоторое время разразился финансовый кризис, акции упали в цене и инвестор продал их на p % дешевле, чем купил сам. А когда кризис закончился, инвестор решил вложить все деньги, вырученные от неудачной продажи акций,

Доказываем (189—191).

189. Докажите, что:
а) сумма кубов катетов прямоугольного треугольника меньше куба гипотенузы;
б) $a^n < b^n$, если n — натуральное число и $0 < a < b$.

190. *Задача Паппа Александрийского (III в.).* Докажите, что если a, b, c и d — положительные числа и $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, то верно неравенство $ad > bc$.

Структурные и методические особенности учебников

Задания на повторение размещены в конце каждого учебника. Они представлены ко всем темам курса данного класса. Их можно использовать для подготовки к различным видам контроля в течение года.

Задания для повторения

Числа

816. Отметьте на координатной оси числа:
а) 0; 0,1; 0,2; 0,35; 0,7; 0,95; 1,05;
б) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{4}{8}$; $1\frac{1}{16}$.

817. Сравните числа:
а) 6 и 4; б) 7,1 и 7,(09); в) $\frac{1}{4}$ и 0,25;
г) $\frac{2}{3}$ и 0,6; д) –2 и –2,2; е) –3,(5) и –3,5.

Вычислите (818—821):

818. а) 2^5; б) 2^6; в) $(-2)^4$; г) $(-2)^5$;
д) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; е) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$; ж) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; з) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3$.

819. а) $2^3 : 4^2 - (-2)^3$; б) $(-3)^2 + 3^3 : 9^2$;
в) $(12{,}5)^2 - \frac{1}{4}$; г) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 - \left(1\frac{1}{3}\right)^2$.

820. а) $\dfrac{\left(7\frac{1}{3}\right)^2-\left(2\frac{2}{3}\right)^2}{\left(5\frac{7}{9}\right)^2-\left(4\frac{2}{9}\right)^2}$; б) $\dfrac{\left(7\frac{3}{7}\right)^2-\left(\frac{6}{7}\right)^2}{\left(17\frac{11}{14}\right)^2-\left(11\frac{3}{14}\right)^2}$.

821. а) $\left(\frac{1}{49^2}-\frac{1}{50^2}\right):\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\right)\cdot\frac{7}{9}$;
б) $\left(\frac{1}{2009^2}-\frac{1}{2010^2}\right):\left(\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}\right)\cdot 2009^2$;
в) $\left(\frac{1}{2010^2}-\frac{1}{2011^2}\right):\left(\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)\cdot\frac{2011}{4021}$.

822. Верно ли равенство:
а) $\left(2\frac{3}{7}-\frac{5}{7}\right)\cdot\frac{7}{24}=\left(\frac{3}{8}+1\frac{13}{16}\right):4\frac{3}{8}$;
б) $\left(5\frac{2}{11}-\frac{9}{11}\right)\cdot\frac{5}{24}=\left(\frac{3}{22}+\frac{57}{33}\right):2\frac{1}{20}$;

д) $\begin{cases}x^2+y^2+x-y=44,\\ \frac{y}{2}-\frac{2}{x}=1-\frac{y}{x};\end{cases}$ е) $\begin{cases}x+y=xy,\\ xy=x^2+y^2;\end{cases}$

ж) $\begin{cases}2x^2-4xy+3y^2=36,\\ 3x^2-4xy+2y^2=36;\end{cases}$ з) $\begin{cases}2x^2-3xy+3y^2=128,\\ 3x^2-3xy+2y^2=128.\end{cases}$

1018. а) $\begin{cases}|x-1|+y=0,\\ 2x-y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}|y-4|=x,\\ 3x+y=1.\end{cases}$

1019. При каком значении a сумма квадратов чисел, составляющих решение системы уравнений
$$\begin{cases}x-2y=a,\\ 2x-y=a+1,\end{cases}$$
будет наименьшей?

Функции и графики

1020. Постройте график функции:
а) $y=x$; б) $y=-2x+3$; в) $y=\frac{1}{3}x-2$; г) $y=-2{,}5x-1$.

1021. Найдите числа a и b, при которых прямые $x+y=-b$ и $x-ay-2=0$:
а) пересекаются в точке (1; 1);
б) параллельны и не совпадают;
в) совпадают.

1022. Постройте график функции $y=3x-1$. Замените x на y, а y на x и постройте график полученной функции в той же системе координат.

1023. Постройте график функции $y=3x^2+1$. Найдите с помощью графика:
а) $y(1)$; б) $y(-2)$;
в) x_0, такое, что $y(x_0)=1$; г) x_0, такое, что $y(x_0)=2$.

1024. Принадлежит ли точка (–0,2; 0,4) графику функции $y=x^2$?

Постройте график функции (1025—1029):

1025. а) $y=3x-4$; б) $y=-2x+1$; в) $y=-3x-2$;
г) $y=|x|-3$; д) $y=|x-3|$; е) $y=|x-1|-2$;
ж) $y=|x|+1$; з) $y=|x+2|$; и) $y=|x+2|-3$.

1026. а) $y=x^2-4$; б) $y=x^2+1$; в) $y=(x-2)^2$;
г) $y=(x+1)^2$; д) $y=-(x-3)^2$; е) $y=-2(x+3)^2$;
ж) $y=(x-2)^2+4$; з) $y=-(x-1)^2+1$;
и) $y=-2(x+1)^2-4$.

Неравенства

Доказываем. Докажите неравенство (1060—1062):

1060. а) $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$; б) $a+\frac{4}{a}\geqslant 4$ $(a>0)$;
в) $a+\frac{9}{a}\leqslant 4$ $(a<0)$; г) $4a+\frac{1}{a}\geqslant 4$ $(a>0)$;
д) $9a+\frac{4}{a}\geqslant 12$ $(a>0)$; е) $25a+\frac{16}{a}\geqslant 40$ $(a>0)$.

1061. а) $m+\frac{9}{m}\geqslant 6$ $(m>0)$; б) $x-1\leqslant\frac{x^2}{4}$; в)* $n!\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ $(n\in N)$.

1062. а) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$;
б) $\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ $(a>0,\ b>0)$;
в) $(a+b)^4\geqslant 8a^4+8b^4$;
г) $(a+2)(b+2)(a+b)\geqslant 16ab$ $(a>0,\ b>0)$;
д) $ab(a+b)\leqslant a^3+b^3$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$;
е) $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ac)$, если a, b и c — стороны некоторого треугольника.

1063. Сохранится ли знак неравенства, если обе части неравенства $9>6$:
а) увеличить на положительное число;
б) уменьшить на положительное число;
в) умножить на положительное число;
г) разделить на отрицательное число?

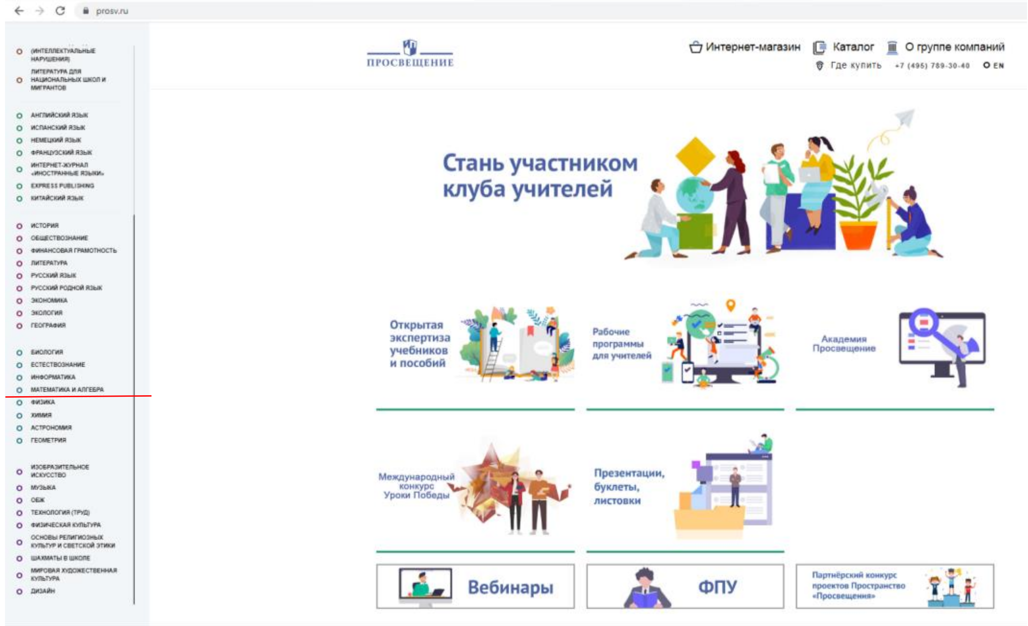
1064. а) Запишите неравенства, полученные умножением неравенства $4>-2$ на: 3; –3; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$.
б) Запишите неравенства, полученные делением неравенства $-3<7$ на: 2; –2; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$.

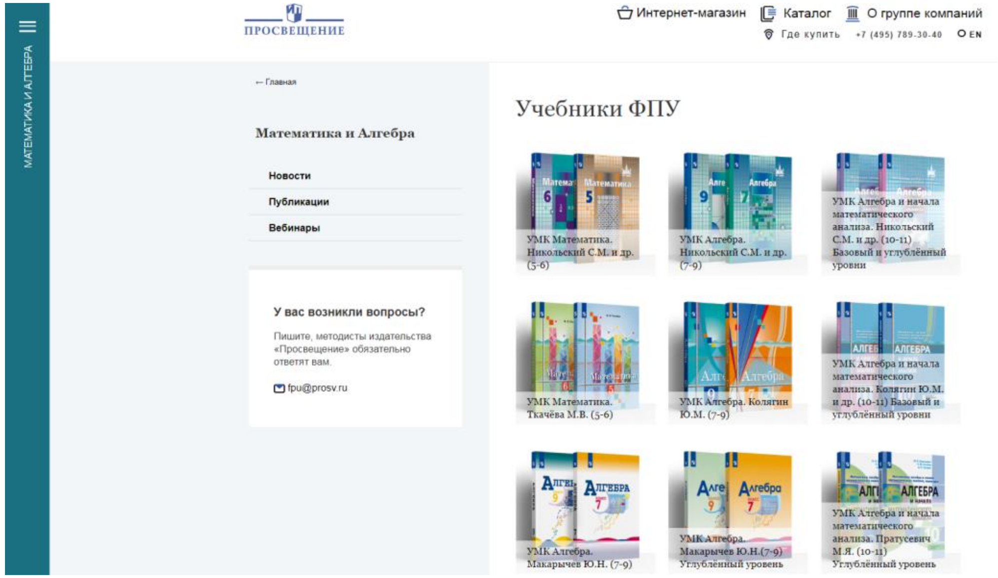
1065. а) Запишите неравенства, полученные прибавлением к обеим частям неравенства $-2<5$ числа 3; числа –8.
б) Запишите неравенства, полученные вычитанием из обеих частей неравенства $-7<-3$ числа 1; числа –1.

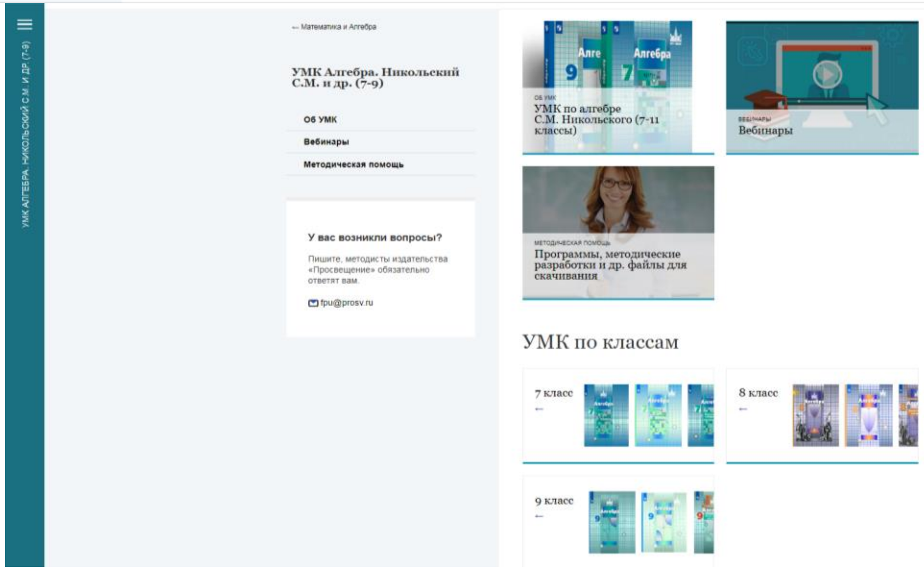
1066. Верно ли неравенство:
а) $8\geqslant 8$; б) $7\geqslant 6$; в) $-1\leqslant 2$; г) $-9\geqslant -8$?

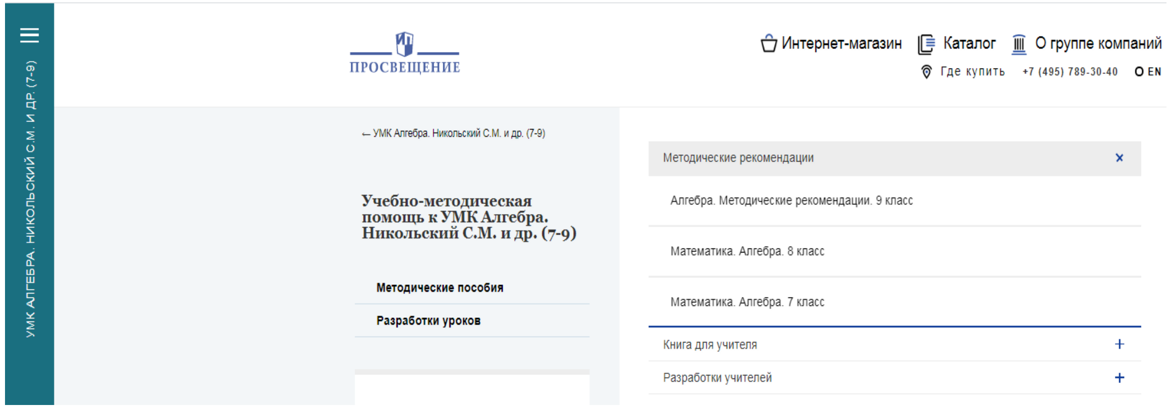
1067. а) Могут ли одновременно быть справедливыми неравенства $a>b$ и $a<b$?
б) Могут ли одновременно быть справедливыми неравенства $a\leqslant b$ и $b\leqslant a$?

Сайт издательства «Просвещение» https://prosv.ru/









Страница серии «Задачник» на сайте издательства
https://prosv.ru/pages/zadachnik.html

ГРУППА КОМПАНИЙ «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

ПРОСВЕЩЕНИЕ

← Главная

Серия «Задачник»

Описание пособий →

У вас возникли вопросы?

Пишите, методисты издательства «Просвещение» обязательно ответят вам.

fpu@prosv.ru

Основная и старшая школа

Математика

Тысяча и одна задача по математике. 5 — 7 классы.

Сборник задач по алгебре. 8-9 классы.

Задачи повышенной сложности по геометрии. 7 класс.

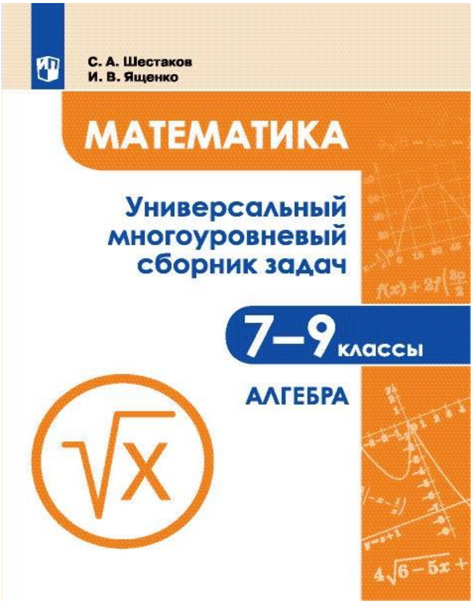
Задачи по геометрии. 7-9 классы.

Задачи по геометрии. 7-11 классы.

Геометрия. Универсальный многоуровневый сборник задач 10-11 классы.

Алгебра и начала математического анализа. Универсальный многоуровневый сборник задач. 10-11 классы.

Задачники



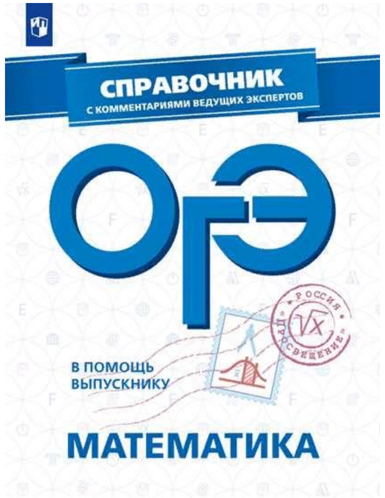
Зив Б.Г. Геометрия. Задачи по планиметрии. 7-9 классы

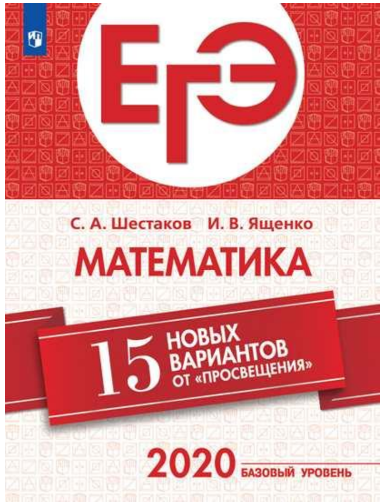
Прасолов В.В. Задачи повышенной сложности по геометрии.

Универсальные многоуровневые сборники задач для основной школы. Под редакцией И.В. Ященко

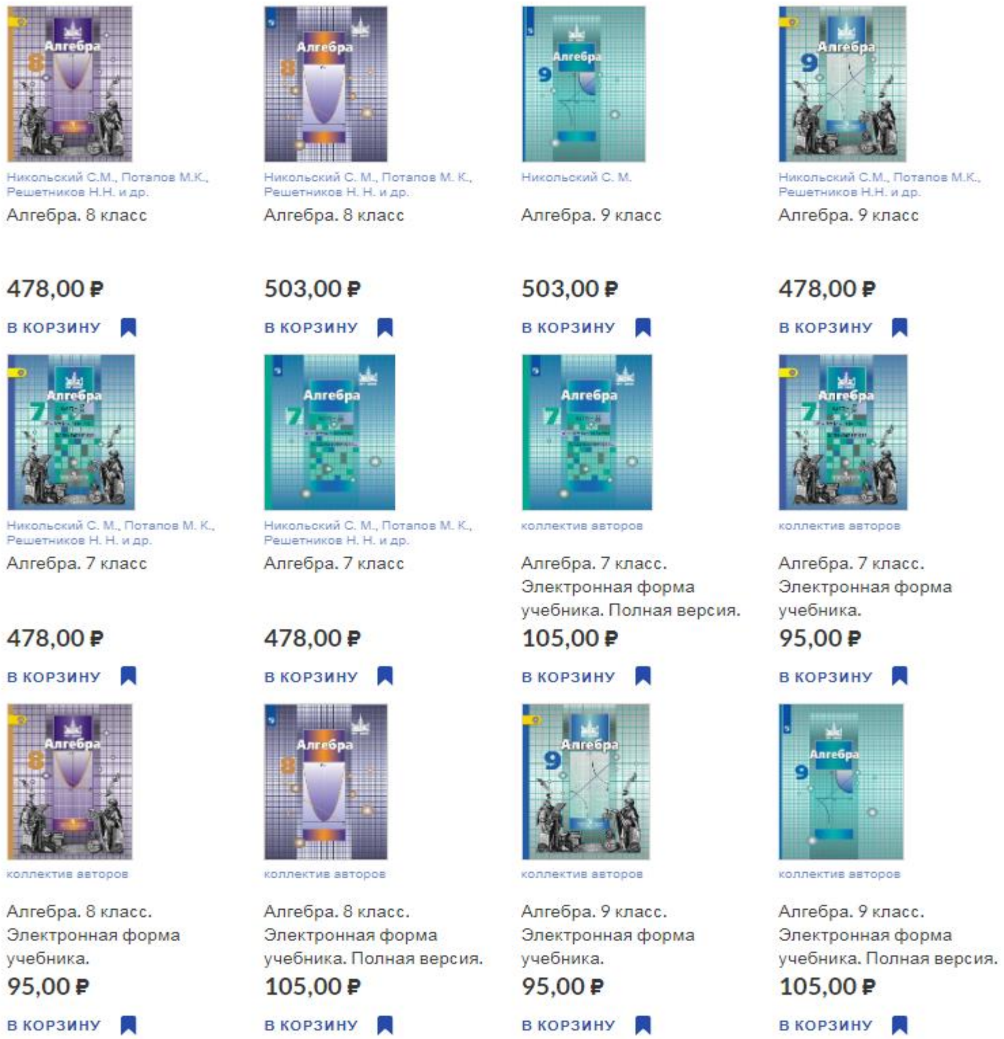
новинки

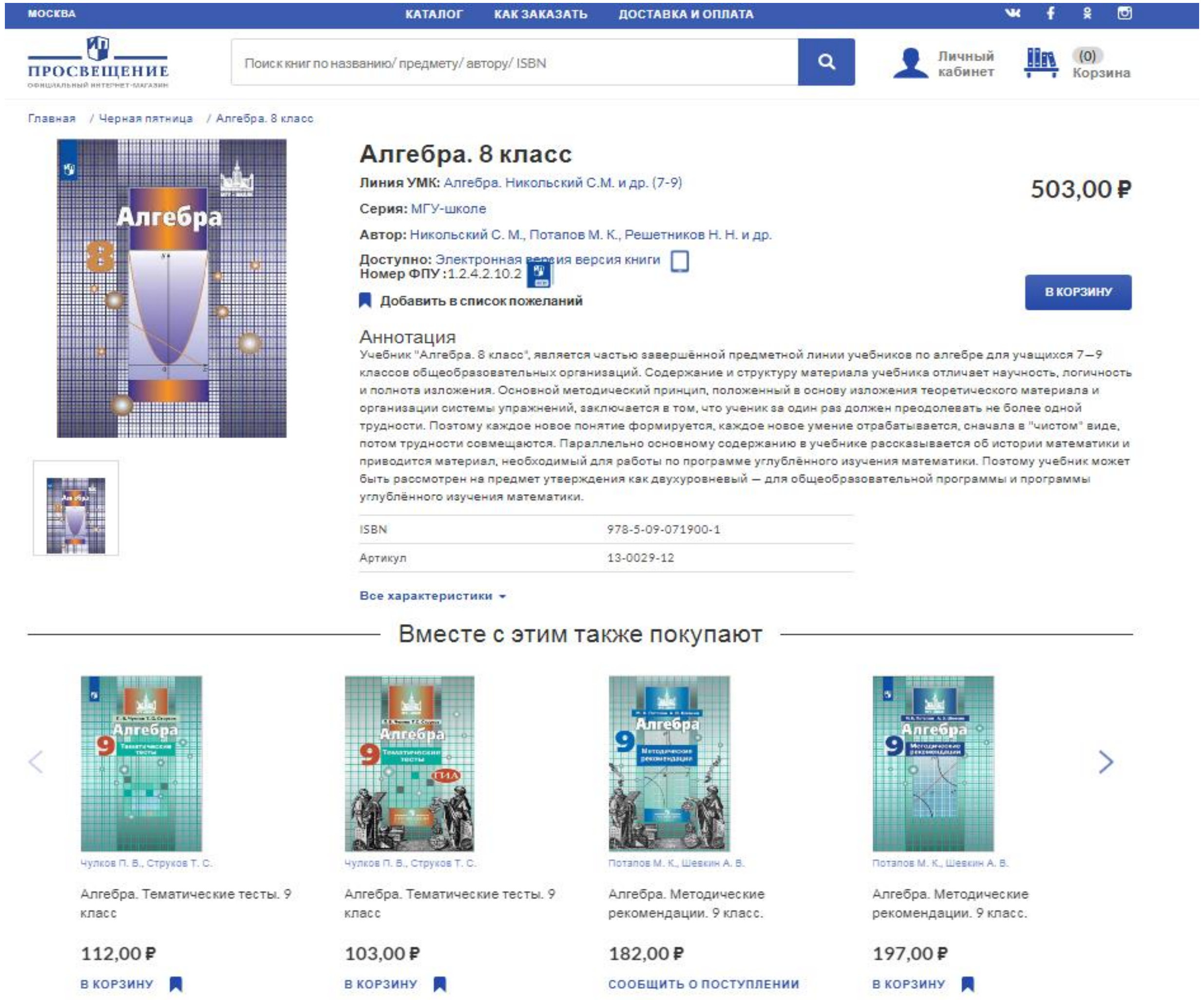
Пособия для подготовки к итоговой аттестации





Сайт официального интернет-магазина издательства https://shop.prosv.ru

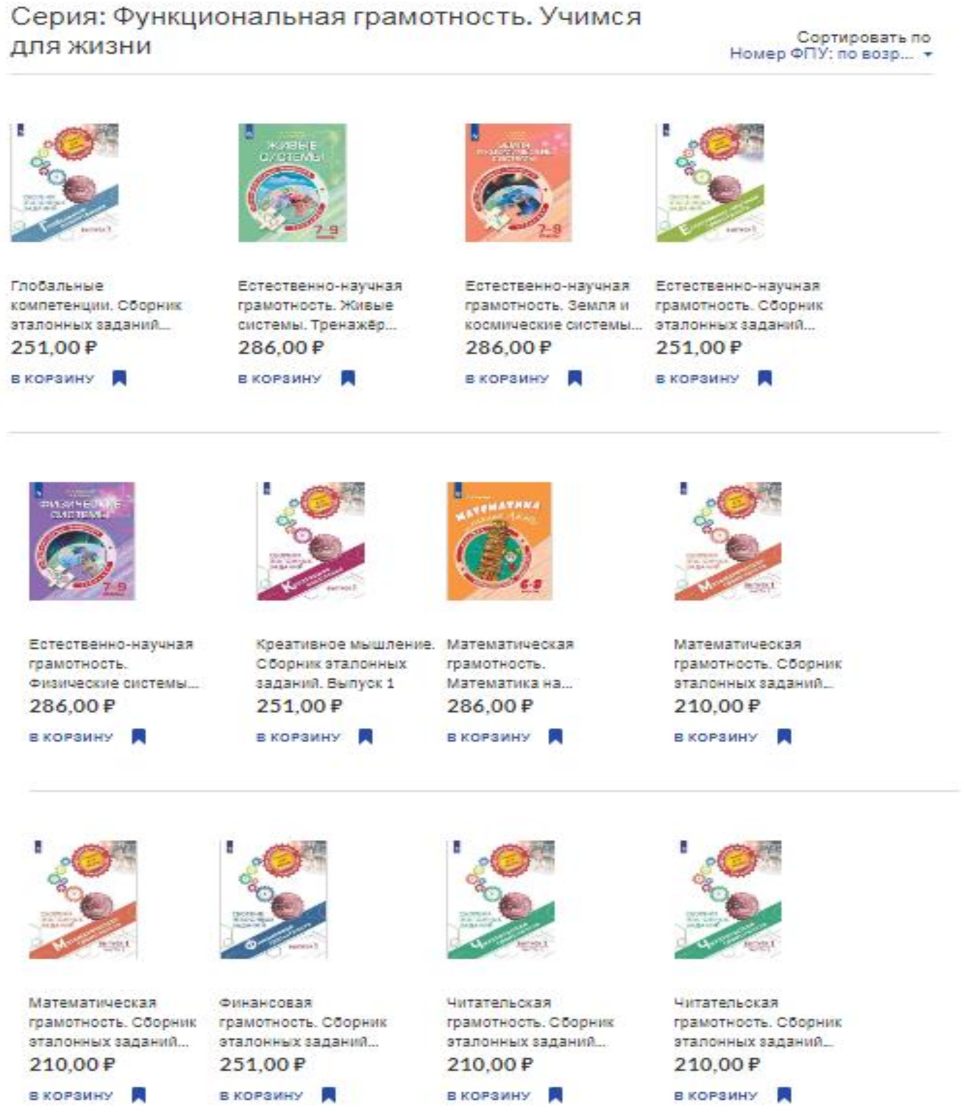




Сайт официального интернет-магазина издательства https://shop.prosv.ru

Поступили в продажу пособия новой серии «Функциональная грамотность. Учимся для жизни» по подготовке к исследованию PISA.

Для покупки этих пособий пройдите по ссылке https://shop.prosv.ru/funkcionalnaya-gramotnost.



Функциональная грамотность. Сборники эталонных заданий

- Пособия данной серии предназначены для формирования и оценки всех аспектов функциональной грамотности, которые изучаются в международном сравнительном исследовании PISA.
- Они содержат обучающие и тренировочные задания, охватывающие все содержательные и компетентностные аспекты оценки функциональной грамотности по каждой из областей. Приводятся развернутые описания особенностей оценки заданий, рекомендации по использованию системы заданий и их оценки. Все задания построены на основе реальных жизненных ситуаций.
- Пособия могут быть использованы в обучающих целях педагогами на уроках и во внеурочной деятельности, а также администрацией школы для организации внутришкольного мониторинга по оценке функциональной грамотности учащихся 5 -7 классов.

Умения и содержание функциональной линии на ОГЭ по математике

4	**Уметь строить и читать графики функций**	
4.1	Определять координаты точки плоскости, строить точки с заданными координатами	развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках; овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач
4.2	Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции, решать обратную задачу	развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках; овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач
4.3	Определять свойства функции по её графику (промежутки возрастания, убывания, промежутки знакопостоянства, наибольшее и наименьшее значения)	овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей
4.4	Строить графики изученных функций, описывать их свойства	овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей

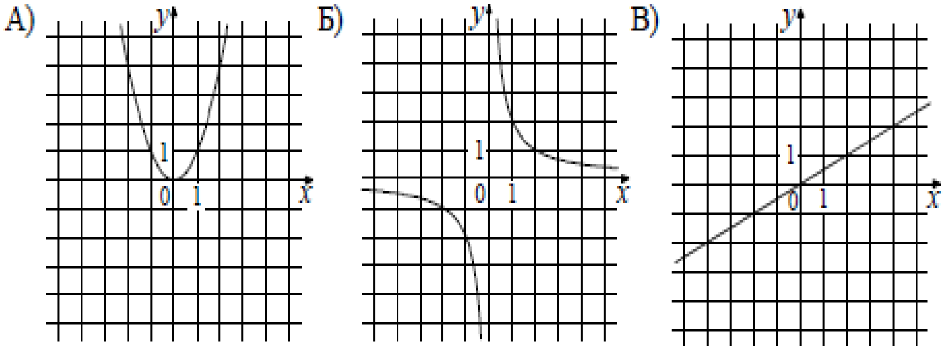
5		**Функции**
5.1		*Числовые функции*
	5.1.1	Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функции
	5.1.2	График функции, возрастание и убывание функции, наибольшее и наименьшее значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, чтение графиков функций
	5.1.3	Примеры графических зависимостей, отражающих реальные процессы
	5.1.4	Функция, описывающая прямую пропорциональную зависимость, её график
	5.1.5	Линейная функция, её график, геометрический смысл коэффициентов
	5.1.6	Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость, её график. Гипербола
	5.1.7	Квадратичная функция, её график. Парабола. Координаты вершины параболы, ось симметрии
	5.1.8	График функции $y=\sqrt{x}$
	5.1.9	График функции $y=\sqrt[3]{x}$
	5.1.10	График функции $y=\lvert x\rvert$
	5.1.11	Использование графиков функций для решения уравнений и систем

Задания функциональной линии на ОГЭ по математике

11	Уметь строить и читать графики функций

11 Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = x^2$ 2) $y = \frac{x}{2}$ 3) $y = \frac{2}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В

23	Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели

23 Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Разложим числитель дроби на множители:

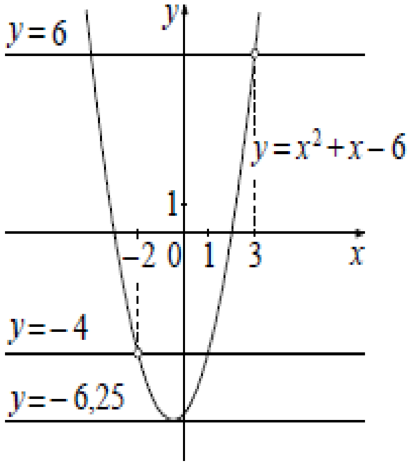
$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$$

При $x \neq -2$ и $x \neq 3$ функция принимает вид: $y = x^2 + x - 6$;

её график — парабола, из которой выколоты точки $(-2; -4)$ и $(3; 6)$.

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых выколотая. Вершина параболы имеет координаты $(-0,5; -6,25)$.

Поэтому $c = -6,25$, $c = -4$ или $c = 6$.



Ответ: $c = -6,25$; $c = -4$; $c = 6$.

Формирование умений выполнения заданий функциональной линии в курсе алгебры 7-9 классов

8 класс

9 класс

Функциональная линия в курсе алгебры 7-9 классов

69. На рисунке 19 приведён график изменения температуры воздуха в течение одного месяца. Измерения проводились один раз в день.

а) Какая температура была 4, 8, 12, 21, 27-го числа?
б) В какие дни температура была выше 0 °C?
в) В какие дни температура была ниже 0 °C?
г) Укажите наибольшую и наименьшую температуру месяца.

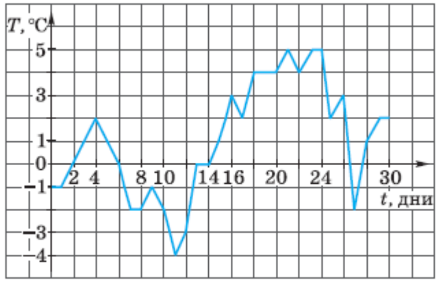


Рис. 19

70. На графике (рис. 20) показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток, начиная с 0 ч 13 августа. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 15 августа. Ответ дайте с точностью до одного градуса.

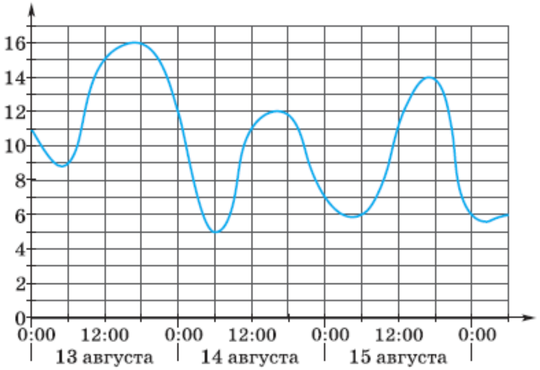


Рис. 20

508. а) $y = \frac{-2x+4}{x+1}$; б) $y = \frac{-x+1}{x-3}$;
в) $y = \frac{2x+1}{x-1}$; г) $y = \frac{3x+2}{x+2}$.

509. Является ли дробно-линейной функция:
а) $y = \frac{x-1}{x-2}$; б) $y = \frac{-3x+1}{2x+2}$; в) $y = \frac{2x-4}{x-2}$?

Постройте график каждой из этих функций.

Дополнения к главе 3

1. Построение графиков функций, содержащих модули

В п. 6.5 приведены примеры построения графиков функций, содержащих модули. Рассмотрим ещё несколько примеров.

Пример 1. Построим график функции $y = \frac{|x|}{x}$.

Эта функция определена для каждого $x \neq 0$. При $x > 0$ имеем $|x| = x$ и $\frac{|x|}{x} = 1$. При $x < 0$ имеем $|x| = -x$ и $\frac{|x|}{x} = -1$.

В точке $x = 0$ функция не определена, поэтому нет точки графика с абсциссой 0.

Следовательно, функцию можно записать и так:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График функции $y = \frac{|x|}{x}$ изображён на рисунке 83. Точки, не принадлежащие графику, изображены незакрашенными кружками.

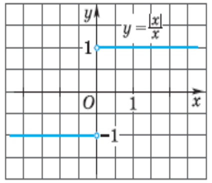


Рис. 83

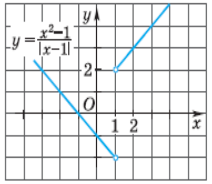


Рис. 84

Пример 2. Построим график функции $y = \frac{x^2-1}{|x-1|}$.

Функция $y = \frac{x^2-1}{|x-1|}$ определена для каждого $x \neq 1$.

При $x > 1$ имеем $|x-1| = x-1$ и $\frac{x^2-1}{|x-1|} = x+1$.

При $x < 1$ имеем $|x-1| = -x+1$ и $\frac{x^2-1}{|x-1|} = -x-1$.

В точке $x = 1$ функция не определена, поэтому нет точки графика с абсциссой 1.

Следовательно, функцию можно записать и так:

$$y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x > 1, \\ -x-1, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

График функции $y = \frac{x^2-1}{|x-1|}$ изображён на рисунке 84.

Пример 3. Построим в одной системе координат графики функций:
а) $y = |x|$; $y = 2|x|$; $y = \frac{1}{2}|x|$; б) $y = -|x|$; $y = -2|x|$; $y = -\frac{1}{2}|x|$.

а) Каждая из трёх функций определена для всех действительных чисел. При $x \geqslant 0$ эти функции задаются формулами $y = x$, $y = 2x$ и $y = \frac{1}{2}x$ соответственно; при $x < 0$ эти функции задаются формулами $y = -x$, $y = -2x$ и $y = -\frac{1}{2}x$ соответственно. Графики этих функций изображены на рисунке 85, *а*.

б) Каждая из трёх функций определена для всех действительных чисел. При $x \geqslant 0$ эти функции задаются формулами $y = -x$, $y = -2x$ и $y = -\frac{1}{2}x$ соответственно; при $x < 0$ эти функции задаются формулами $y = x$, $y = 2x$ и $y = \frac{1}{2}x$ соответственно. Графики этих функций изображены на рисунке 85, *б*.

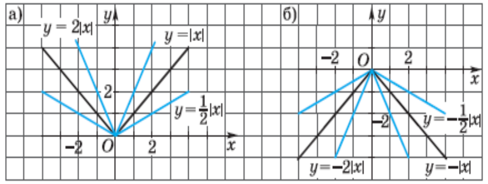


Рис. 85

Функциональная линия в курсе алгебры 7-9 классов

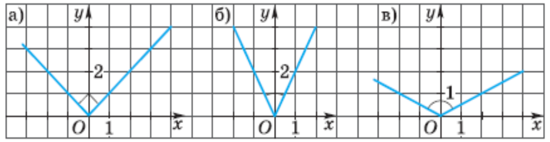


Рис. 86

Отметим следующее очевидное утверждение.
Лучи, составляющие график функции $y = k|x|$, образуют:
1) при $k = 1$ — прямой угол (рис. 86, *а*);
2) при $k > 1$ — острый угол (рис. 86, *б*);
3) при $0 < k < 1$ — тупой угол (рис. 86, *в*).

С помощью параллельных переносов можно построить график функции $y = k|x - x_0| + y_0$, где $k \neq 0$.

Пример 4. Построим график функции $y = 2|x + 2| - 2$.
1) Сначала построим график функции $y = 2|x|$, перенесём его на 2 единицы влево, получим график функции $y = 2|x + 2|$ (рис. 87, *а*).
2) Потом перенесём график функции $y = 2|x + 2|$ на 2 единицы вниз, получим график функции $y = 2|x + 2| - 2$ (рис. 87, *б*).

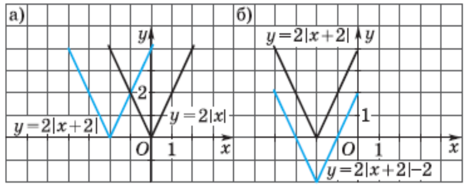


Рис. 87

Пример 5. Построим график функции $y = |x - 1| + |x + 1|$.
Выражения $x - 1$ и $x + 1$, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль в точках 1 и -1 соответственно. Рассмотрим данную функцию на числовых промежутках $(-\infty; -1)$, $[-1; 1]$ и $(1; +\infty)$.

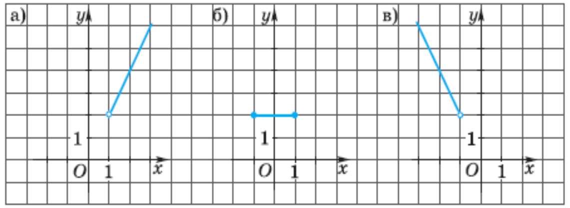


Рис. 88

При $x > 1$ имеем
$$|x - 1| + |x + 1| = x - 1 + x + 1 = 2x.$$
График функции $y = 2x$ при $x > 1$ изображён на рисунке 88, *а*.

При $-1 \leqslant x \leqslant 1$ имеем
$$|x - 1| + |x + 1| = -x + 1 + x + 1 = 2.$$
График функции $y = 2$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ изображён на рисунке 88, *б*.

При $x < -1$ имеем
$$|x - 1| + |x + 1| = -x + 1 - x - 1 = -2x.$$

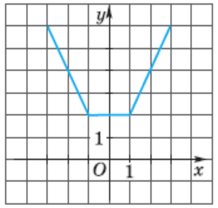


Рис. 89

График функции $y = -2x$ при $x < -1$ изображён на рисунке 88, *в*.

График функции $y = |x - 1| + |x + 1|$ на всей оси Ox изображён на рисунке 89.

Пример 6. Построим график функции $y = ||x| - 2|$.

Сначала построим график функции $y = |x| - 2$ (рис. 90, *а*). При $x \geqslant 2$ и $x \leqslant -2$ имеем $|x| - 2 \geqslant 0$, поэтому $||x| - 2| = |x| - 2$.

Это означает, что при $x \geqslant 2$ и $x \leqslant -2$ график функции $y = ||x| - 2|$ совпадает с графиком функции $y = |x| - 2$.

При $-2 < x < 2$ значения функции $y = |x| - 2$ отрицательны, а функция $y = ||x| - 2|$ принимает противоположные им положительные значения. Поэтому часть графика, расположенную на рисунке 90, *а* ниже оси Ox, надо симметрично отразить относительно оси Ox.

График функции $y = ||x| - 2|$ изображён на рисунке 90, *б*.

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ надо учесть, что
$$f(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) > 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0, \\ 0, \text{ если } f(x) = 0. \end{cases}$$

Поэтому при построении графика функции $y = |f(x)|$ надо сохранить точки графика функции $y = f(x)$, которые лежат выше оси Ox или на ней, а точки графика функции $y = f(x)$, которые

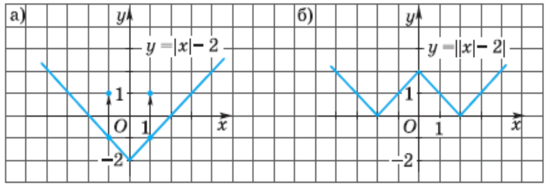


Рис. 90

Постройте график функции (510—514):

510. а) $y = 2|x|$; б) $y = 3|x|$; в) $y = -2|x|$;
г) $y = -3|x|$; д) $y = \frac{1}{2}|x|$; е) $y = -\frac{1}{2}|x|$.

511. а) $y = \begin{cases} x + 2, \text{ если } x \geqslant 0, \\ 2, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

512. а) $y = |x| + x$; б) $y = |x| - x$;
в) $y = x \cdot |x|$; г) $y = |x - 2| + |x + 2|$;
д) $y = ||x| - 3|$; е) $y = |||x| - 2| - 1|$;
ж) $y = x^2 - 6|x|$; з) $y = x^2 - 4|x|$;
и) $y = x^2 - 2|x| - 1$; к) $y = x^2 + 2|x| - 1$;
л) $y = |x^2 - 4x + 3|$; м) $y = |x^2 - 2|x||$;
н) $y = |x^2 - 4|x||$; о) $y = |x^2 - 2|x| - 1|$;
п) $y = |x^2 + 2|x| - 1|$.

513. а) $y = \frac{4}{x} - 2$; б) $y = \left|\frac{4}{x} - 2\right|$; в) $y = \frac{4}{|x|} - 2$;
г) $y = \left|\frac{4}{|x|} - 2\right|$; д) $y = \frac{-6}{x - 2}$; е) $y = \left|\frac{-6}{x - 2}\right|$;

ж) $y = \frac{-6}{|x| - 2}$; з) $y = \left|\frac{-6}{|x| - 2}\right|$; и) $y = \frac{2}{x - 1} - 2$;
к) $y = \left|\frac{2}{x - 1} - 2\right|$; л) $y = \frac{2}{|x| - 1} - 2$; м) $y = \left|\frac{2}{|x| - 1} - 2\right|$.

514. а) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$; б) $y = \left|\frac{x - 1}{x + 1}\right|$; в) $y = \frac{|x| - 1}{|x| + 1}$;
г) $y = \left|\frac{|x| - 1}{|x| + 1}\right|$; д) $y = \frac{x - 1}{|x - 1|}$; е) $y = \frac{|x - 2|}{x - 2}$;
ж) $y = \frac{x^2 - 4}{|x + 2|}$; з) $y = \frac{|x + 3|}{x^2 - 9}$; и) $y = \frac{4 - x^2}{|x - 2|}$;
к) $y = \frac{|x + 1|}{x^2 - 1}$; л) $y = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$.

Функциональная линия в курсе алгебры 7-9 классов

768. На рисунке 112 представлены графики функций. Запишите формулу, которой задана каждая функция.

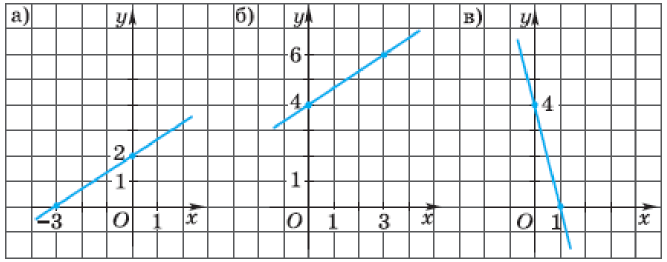


Рис. 112

783. На рисунке 114 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки a, b, c.

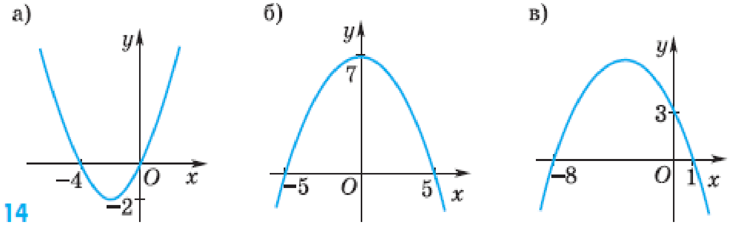


Рис. 114

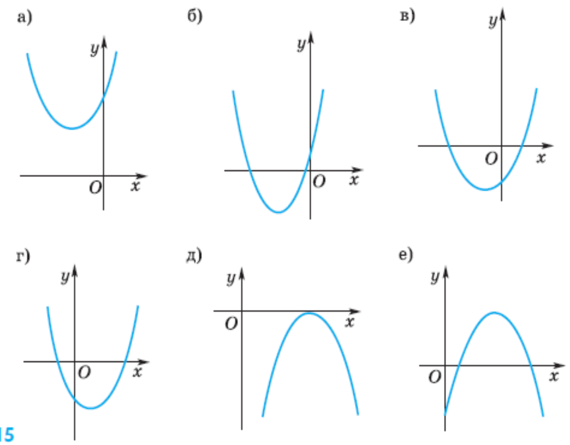


Рис. 115

784. По графику функции $y = ax^2 + bx + c$ определите знаки a, b, c (рис. 115).

785. Как расположен в координатной плоскости xOy график функции

$$y = |ax^2 + bx| + c,$$

если $D = b^2 - 4ac > 0$, $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$? Постройте схематически график функции.

786. На рисунке 116 изображён график квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Какие значения могут принимать коэффициенты a, b и свободный член c?

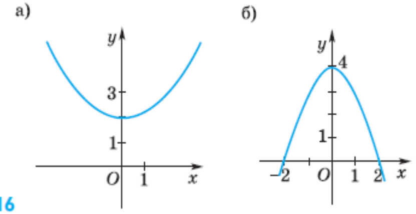


Рис. 116

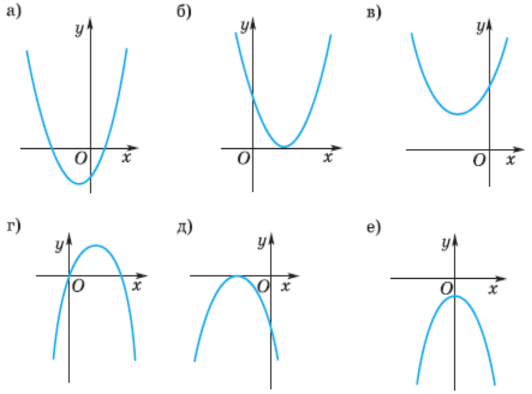


Рис. 117

787. На рисунке 117 изображены графики квадратичных функций. Укажите рисунок, удовлетворяющий условию:
а) $D > 0$, $a < 0$; б) $D > 0$, $a > 0$; в) $D = 0$, $a < 0$;
г) $D < 0$, $a > 0$; д) $D < 0$, $a < 0$; е) $D = 0$, $a > 0$.
D — дискриминант, a — коэффициент при старшем члене квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

788. Постройте график функции:
а) $y = |x|(x + 2)$; б) $y = x|x + 2|$.

789. Определите с помощью графиков значения x, для которых выполняется равенство:
а) $\frac{1}{x} = 1$; б) $3 = \frac{1}{x}$; в) $\frac{1}{x} = x^2$.

Постройте график функции (790—791):

790. а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = -\frac{1}{x}$; в) $y = \frac{|x|}{x^2}$; г) $y = -\frac{x^2}{|x^3|}$.

791. а) $y = \frac{1}{x} + 1$; б) $y = \frac{1}{x} - 2$; в) $y = 2 - \frac{1}{x}$; г) $y = \frac{x - 1}{x}$.

Укажите на координатной плоскости xOy все точки, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют условию (792—793):

792. а) $x^2 - y^2 = 0$; б) $(x - 2)^2 - y^2 = 0$;
в) $x^2 - (y - 3)^2 = 0$; г) $(x + 3)^2 - (y - 1)^2 = 0$.

793. а) $x^2 + y^2 = 4$; б) $x^2 + y^2 \leqslant 4$;
в) $x^2 + y^2 \geqslant 4$; г) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$;
д) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 4$; е) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 \geqslant 4$.

Графическое решение уравнений и их систем

10.1. Графический способ решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Пример 1. Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ x + 2y + 3 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Выразим y через x в каждом из этих уравнений, получим систему

$$\begin{cases} y = 3x + 2, \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, \end{cases} \qquad (2)$$

равносильную системе (1).

Введём в плоскости прямоугольную систему координат xOy. Уравнение $y = 3x + 2$ есть уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(1; 5)$ и $B_1(0; 2)$, а уравнение $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ есть уравнение прямой, проходящей через точки $A_2(1; -2)$ и $B_2\left(0; -\frac{3}{2}\right)$.

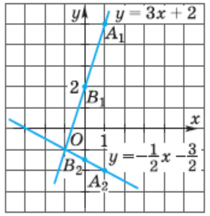


Рис. 99

Построим эти прямые в системе координат xOy (рис. 99).

Как видно из рисунка 99, прямые пересекаются в точке $(-1; -1)$. Её координаты $x = -1$, $y = -1$ и являются единственным решением системы (2), но тогда и равносильной ей системы (1). Подставив найденные значения x и y в каждое уравнение системы (1), убедимся, что решение системы найдено точно.

Отметим, что по виду уравнений (2) заранее можно сказать, что рассматриваемые прямые пересекаются в одной точке. Ведь угловые коэффициенты этих прямых разные $\left(3 \neq -\frac{1}{2}\right)$, следовательно, прямые не параллельны.

Пример 2. Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x - y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Выразим y через x в каждом из уравнений системы (3), получим равносильную ей систему уравнений

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ y = x + 2. \end{cases} \qquad (4)$$

Уравнения системы (4) есть уравнения параллельных прямых, так как они имеют равные угловые коэффициенты.

Эти прямые не совпадают, потому что они пересекают ось y в разных точках: первая — в точке (0; 1), а вторая — в точке (0; 2) (рис. 100).

Таким образом, эти прямые не пересекаются, поэтому система (4), а тогда и система (3) не имеют решений.

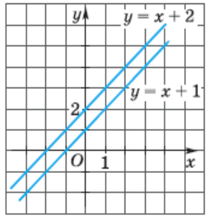


Рис. 100

Пример 3. Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y - 1 = 0, \\ -4x - 4y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Выразим y через x в каждом из этих уравнений, получим равносильную системе (5) систему уравнений

$$\begin{cases} y = -x + 0{,}5, \\ y = -x + 0{,}5. \end{cases} \qquad (6)$$

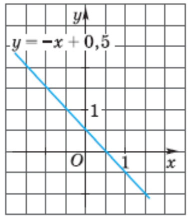


Рис. 101

Уравнения этой системы одинаковы и, следовательно, определяют одну и ту же прямую $y = -x + 0{,}5$ (рис. 101).

Это показывает, что все решения системы (5) образуют совокупность пар координат $(x; y)$ точек прямой $y = -x + 0{,}5$. Система (5) имеет бесконечно много решений: $(x; -x + 0{,}5)$, где x — любое число.

Таким образом, для решения системы линейных уравнений графическим способом надо:

1) разрешить каждое уравнение относительно y;

2) построить на координатной плоскости прямые, соответствующие полученным уравнениям.

Если прямые пересекаются, то координаты точки их пересечения и будут решением системы.

Если прямые окажутся параллельными, то система не имеет решений.

Если прямые совпадут, то система имеет бесконечно много решений — множество пар координат точек этой прямой.

Замечание. Случаи, когда хотя бы в одном из уравнений системы не удаётся выразить y через x, рассмотрены в следующем пункте.

Задача. Поезд, выйдя в момент $t_0 = 0$ со станции O, идёт со скоростью 100 км/ч. Навстречу ему со скоростью 80 км/ч идёт другой поезд, вышедший со станции A в тот же момент $t_0 = 0$. Расстояние от O до A равно 200 км. Построить графики движения этих поездов и по ним определить, когда и на каком расстоянии от станции O поезда встретятся.

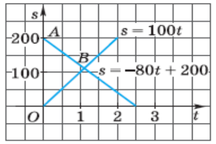


Рис. 102

Решение. Зададим прямоугольную систему координат tOs (рис. 102). Будем считать, что 1 см на оси t соответствует 1 ч, а 1 см на оси s соответствует 100 км.

Отметим на оси s точку A, имеющую координату $s = 200$. Удобно считать, что первый поезд движется в положительном направлении оси s от точки O, а второй — в отрицательном направлении оси s от точки A. Тогда закон движения первого поезда выражается функцией

$$s = 100t, \qquad (7)$$

а закон движения второго поезда выражается функцией

$$s = -80t + 200. \qquad (8)$$

Скорость есть коэффициент при t. Для первого поезда она положительная, а для второго — отрицательная. Кроме того, при $t = 0$ первый поезд имеет на оси s координату $s = 0$, а второй — координату $s = 200$, что согласуется с уравнениями (7) и (8).

На рисунке 102 изображены прямые — графики этих функций. Встреча поездов произойдёт в такой момент t, при котором ординаты точек графиков равны одному и тому же числу s. Но тогда эти числа t и s должны удовлетворять одновременно обоим уравнениям (7) и (8), т. е. быть координатами точки B пересечения прямых.

Из рисунка видно, что координаты точки B приблизительно равны:

$$t \approx 1{,}1, \quad s \approx 110.$$

Для сравнения решим систему уравнений

$$\begin{cases} s = 100t, \\ s = -80t + 200 \end{cases}$$

и получим $t = \frac{10}{9}$ ч $= 66{,}66...$ мин ≈ 67 мин,

$$s = 100 \cdot \frac{10}{9} \text{ км} = 111{,}11... \text{ км} \approx 111 \text{ км}.$$

Ответ: поезда встретятся приблизительно через 1,1 ч на расстоянии приблизительно 110 км от станции O.

562. Как решить графическим способом систему линейных уравнений?

563. Определите на глаз координаты точек пересечения прямых, указанных на рисунке 103.

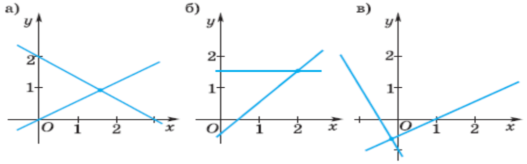


Рис. 103

564. Определите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:
а) $y = 2x - 7$; б) $y = -x - 2$; в) $y = \frac{1}{7} - 2x$; г) $y = -\frac{1}{3} - 0{,}2x$.

565. Определите координаты точек пересечения графиков функций:
а) $y = x + 4$ и $y = 3x$; б) $y = -2$ и $y = 7x + 1$;
в) $y = 2 - 3x$ и $y = 5x - 4$.

566. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = 5 - x, \\ y = x - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x - 2, \\ y = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 2x - 4, \\ y = 2 - x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ y + x = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0, \\ 2x + 4y + 2 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x - y = 4; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x + y = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 7x - y - 3 = 0, \\ 14x - 2y = -5; \end{cases}$ и) $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0, \\ 6x + 2y = 2. \end{cases}$

Графическое решение уравнений и их систем

579. Составьте систему уравнений, решением которой является пара чисел:
а) (3; –1); б) (1; 3); в) (5; –2); г) (0; 3).

580. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - y + 1 = 0, \\ y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ -2x + y = 5, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + y = 5, \\ x + y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 4, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{2}{3} = 0, \\ 2x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$

Исследуем (581—582).

581. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} (3 - 2a)x + (1 - a)y - a^2 = 0, \\ 7x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

582. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} a^2x - (2a + 1)y - (5a + 3) = 0, \\ 4x - 5y - 13 = 0 \end{cases}$$
не имеет решений.

10.3. Решение систем уравнений первой и второй степени графическим способом

Системы уравнений первой и второй степени, как и системы уравнений первой степени, можно решать графически.

Пример 1. Решим графическим способом систему уравнений
$$\begin{cases} x - y - 3 = 0, \\ x^2 - 2x = y + 3. \end{cases} \qquad (1)$$

Разрешив каждое уравнение системы (1) относительно y, получим систему уравнений
$$\begin{cases} y = x - 3, \\ y = x^2 - 2x - 3. \end{cases}$$

В одной системе координат xOy построим прямую $y = x - 3$ и параболу $y = x^2 - 2x - 3$ (рис. 105). Для построения этих графиков составим таблицы значений функций (x_0 — абсцисса вершины параболы).

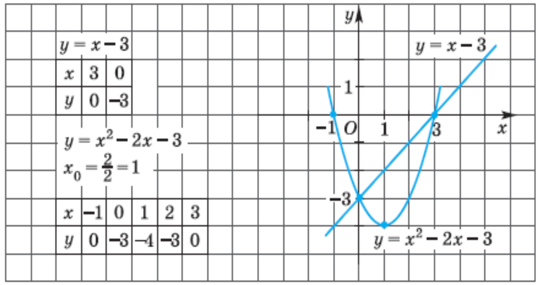


Рис. 105

Как видно из рисунка 105, прямая и парабола пересекаются в двух точках (0; –3) и (3; 0). Пары чисел (0; –3) и (3; 0) обращают каждое уравнение системы в верное равенство, следовательно, решениями системы являются пары чисел (3; 0) и (0; –3). Других решений система не имеет.

Пример 2. Решим графическим способом систему уравнений
$$\begin{cases} y = 2x^2 + 8x + 7, \\ y = -x^2 - 2x + 4. \end{cases} \qquad (2)$$

В одной системе координат построим параболы $y = 2x^2 + 8x + 7$ и $y = -x^2 - 2x + 4$ (рис. 106). Для этого составим таблицы значений функций.

Параболы пересекаются в двух точках, поэтому система (2) имеет два решения. Легко убедиться подстановкой: первое решение (–3; 1) найдено точно, а второе (–0,3; 4,5) приближённо.

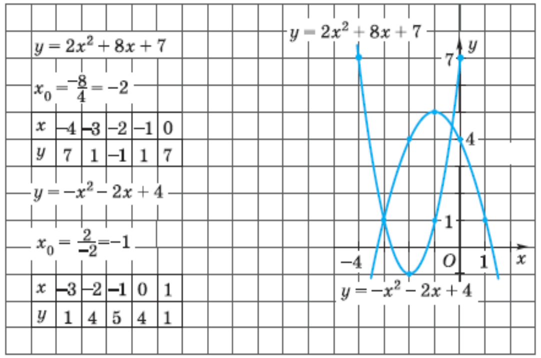


Рис. 106

Замечание. Если потребуется найти второе решение точно, то нужно будет решить уравнение $2x^2 + 8x + 7 = -x^2 - 2x + 4$, которое имеет корни $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, и найти значения y, соответствующие найденным корням: $y_1 = 1$, $y_2 = 4\frac{5}{9}$. Теперь второе решение найдено точно: $\left(-\frac{1}{3}; 4\frac{5}{9}\right)$.

Пример 3. Решим графическим способом систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^2. \end{cases} \qquad (3)$$

Первое уравнение системы (3) есть уравнение окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром $O(0; 0)$. Второе уравнение системы (3) есть уравнение параболы. Окружность и парабола пересекаются в двух точках (1; 1) и (–1; 1) (рис. 107, *а*). Система (3) имеет два решения: (1; 1) и (–1; 1). Как легко убедиться подстановкой, оба решения найдены точно.

Отметим, что графическим способом можно решать и некоторые другие системы.

Пример 4. Решим графическим способом систему уравнений
$$\begin{cases} y = |x| - 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \qquad (4)$$

Первое уравнение системы (4) задаёт функцию, график которой — прямой угол с вершиной (0; –1). Его стороны проходят через точки (–1; 0) и (1; 0). Второе уравнение системы (4) есть уравнение окружности с центром (0; 0) и радиусом 1. Эти графики пересекаются в точках (0; –1), (–1; 0) и (1; 0) (рис. 107, *б*). Система (4) имеет три решения: (0; –1), (–1; 0), (1; 0). Легко убедиться, что решения найдены точно.

а) б)

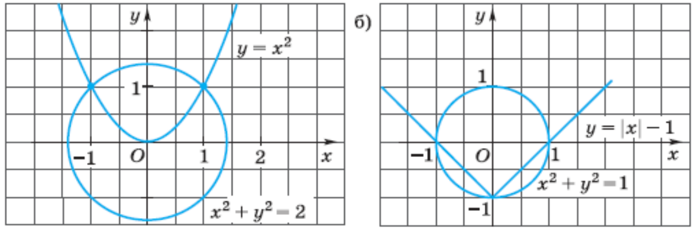


Рис. 107

Графическое решение уравнений и их систем

583. а) Как решить систему уравнений графическим способом?
б) Всегда ли графический способ решения систем уравнений даёт точные решения?
в) Как проверить, точное или приближённое решение получено?

584. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = 3, \\ y + 6 = x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 2, \\ x^2 = 3 + y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = 2x - 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2, \\ y = x + 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1, \\ y = -x^2 + 4x + 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 1, \\ y = x^2 + 1. \end{cases}$

585. Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^2, \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9, \\ y - x = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy = 1, \\ y = 0{,}5x + 0{,}5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy = 1, \\ y = -2x + 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 10, \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20; \end{cases}$ е) $\begin{cases} xy = 8, \\ y + 1 = x^2? \end{cases}$

Исследуем (586—587).

586. Говорят, что прямая $y = kx + l$ касается параболы $y = ax^2 + bx + c$, если прямая и парабола имеют единственную общую точку. То есть если система уравнений $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c, \\ y = kx + l \end{cases}$ имеет единственное решение. Найдите все значения k, при каждом из которых:
а) прямая $y = kx$ касается параболы $y = 0{,}5x^2 - x + 4{,}5$;
б) прямая $y = kx - 4k - 2$ касается параболы $y = 0{,}5x^2 - 3x + 6{,}5$.

587. Говорят, что прямая $y = kx + b$ касается окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, если прямая и окружность имеют единственную общую точку. То есть если система уравнений

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \\ y = kx + b \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите все значения k, при каждом из которых:
а) прямая $y = kx + 3$ касается окружности $(x + 2)^2 + y^2 = 9$;
б) прямая $y = k(x - 5) + 5$ касается окружности $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

10.4. Примеры решения уравнений графическим способом

Пример 1. Решим графическим способом уравнение

$$x^2 = -2x + 3. \qquad (1)$$

Чтобы найти значения x, при которых выполняется равенство (1), построим графики двух функций $y = x^2$ и $y = -2x + 3$ в одной системе координат (рис. 108).

Парабола $y = x^2$ и прямая $y = -2x + 3$, изображённые на рисунке 108, пересекаются в точках (1; 1) и (−3; 9). При $x = 1$ и $x = -3$ эти функции имеют одинаковые значения, т. е. выполняется равенство

$$x^2 = -2x + 3.$$

Это означает, что числа 1 и −3 являются корнями уравнения (1).

Графический способ решения уравнений даёт лишь приближённые корни. Чтобы доказать, что какой-то из корней найден точно, надо подставить его в решаемое уравнение и проверить, получится ли верное равенство.

В примере 1 корни найдены точно, так как

$$1^2 = -2 \cdot 1 + 3,$$
$$(-3)^2 = -2 \cdot (-3) + 3.$$

Уравнение (1) можно было бы решить без графиков, переписав его в виде

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

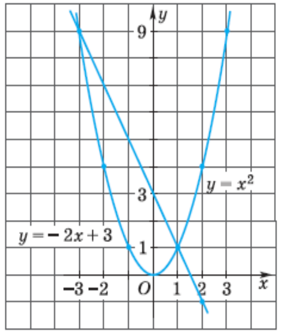


Рис. 108

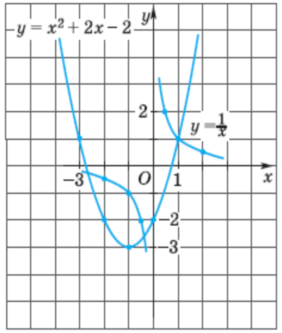


Рис. 109

Пример 2. Решим графическим способом уравнение

$$x^2 + 2x - 2 = \frac{1}{x}. \qquad (2)$$

Построим в одной системе координат графики функций

$$y = x^2 + 2x - 2 \text{ и } y = \frac{1}{x}.$$

Парабола $y = x^2 + 2x - 2$ и гипербола $y = \frac{1}{x}$ (рис. 109) пересекаются в трёх точках (1; 1), (−0,4; −2,5) и (−2,6; −0,5), приближённые значения координат которых находятся из рисунка. Абсциссы этих точек — корни уравнения (2): $x_1 = 1$ — точный корень, так как

$$1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = \frac{1}{1},$$

а $x_2 = -0{,}4$ и $x_3 = -2{,}6$ — корни приближённые.

588. На рисунке 110 изображены графики функций

$$y = \frac{1}{x} \text{ и } y = 2x - 1.$$

а) Укажите несколько значений x, при которых эти функции принимают различные значения.
б) Укажите корни уравнения

$$\frac{1}{x} = 2x - 1.$$

Являются ли найденные корни точными или приближёнными?

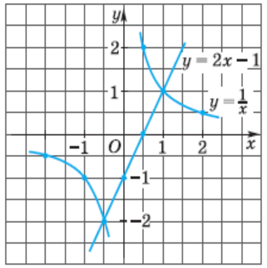


Рис. 110

Решите графическим способом уравнение (589—590):

589. а) $x^2 = x + 2$; б) $x^2 = 3x - 2$; в) $2x^2 = 3x + 2$;
г) $2x^2 = -x + 3$; д) $3x^2 = -x + 4$; е) $3x^2 = x + 2$.

590. а) $\frac{1}{x} = 2x + 1$; б) $\frac{1}{x} = -x + 2$.

591. Определите с помощью графиков, сколько корней имеет уравнение:
а) $x^2 = x - 1$; б) $2x^2 = 3x + 5$;
в) $3x^2 = x + 7$; г) $\frac{1}{x} = -x + 1$.

Функциональная линия в курсе алгебры 7-9 классов

При изучении материала главы 2 вам предстоит познакомиться с корнями степени n и их свойствами, научиться преобразованиям алгебраических выражений, содержащих корни степени n. Этот материал составит базу для расширения понятия степени на случай рационального и иррационального показателей.

§ 4. Функция $y = x^n$

4.1. Свойства и график функции $y = x^n$, $x \geqslant 0$

Функции $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, ..., рассматриваемые только на промежутке $[0; +\infty)$, имеют ряд одинаковых свойств. Поэтому обычно рассматривают функцию

$$y = x^n, \quad x \geqslant 0, \qquad (1)$$

где под n подразумевается любое натуральное число, большее 1.

Сформулируем свойства функции (1).

1) Если $x = 0$, то $y = 0$.
2) Если $x = 1$, то $y = 1$.
3) Если $x > 0$, то $y > 0$.
4) Функция $y = x^n$ является возрастающей на промежутке $[0; +\infty)$.
5) Если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.
6) Функция $y = x^n$ непрерывна на промежутке $[0; +\infty)$.

Свойства 1 и 2 непосредственно следуют из формулы (1). Геометрически они означают, что график функции $y = x^n$ проходит через начало координат и точку (1; 1).

Свойство 3 следует из того, что если $x > 0$, то $x^n > 0$. Это свойство означает, что график функции $y = x^n$ для $x > 0$ расположен выше оси Ox.

Свойство 4 следует из того, что если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то $x_1^n < x_2^n$.

Свойство 5 очевидно. В самом деле, если x стремится к $+\infty$, пробегая натуральные числа 1, 2, 3, 4, ..., то $y = x^n$ тоже стремится к $+\infty$, пробегая числа 1^n, 2^n, 3^n, ... Для остальных чисел x справедливость этого свойства сохраняется.

Свойство 6 для $n = 2$ становится очевидным, если, например, считать, что y есть площадь квадрата со стороной x. Ясно, что малое изменение стороны квадрата влечёт за собой малое изменение площади, а это и означает непрерывность функции $y = x^2$ для положительных x.

Для $n = 3$ свойство 6 также становится очевидным, если, например, считать, что y есть объём куба со стороной x. Ясно, что малое изменение стороны куба влечёт за собой малое изменение его объёма, а это и означает непрерывность функции $y = x^3$ для положительных x.

Для $n \geqslant 4$ свойство 6 надо доказывать, но это доказательство мы проводить не будем.

Свойство 6 означает, что график функции $y = x^n$ — непрерывная линия на промежутке $[0; +\infty)$.

Замечание. Доказательства свойств 3 и 4 требуют применения метода математической индукции (см. п. 1 Дополнений к главе 3).

На рисунке 52 в одной и той же декартовой системе координат изображены графики функций

$$y = x^2, \; y = x^3, \; y = x^4 \qquad (2)$$

пока только для неотрицательных значений x ($x \geqslant 0$). Эти графики отражают свойства функций (2).

Дадим пояснения к рисунку 52.

На интервале (0; 1), т. е. для значений x, для которых

$$0 < x < 1,$$

выполняются неравенства

$$1 > x > x^2 > x^3 > x^4 > \ldots . \qquad (3)$$

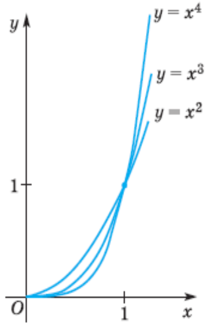


Рис. 52

Действительно, умножая неравенство $1 > x$ на x, где x — положительное число, получаем неравенство $x > x^2$. Умножая это неравенство на x ($x > 0$), получаем неравенство $x^2 > x^3$ и т. д.

В силу неравенств (3) график функции $y = x^3$ на интервале (0; 1) расположен ниже графика функции $y = x^2$, график функции $y = x^4$ расположен ниже графика функции $y = x^3$ и т. д.

Далее, на интервале $(1; +\infty)$, т. е. для значений x, для которых $1 < x$, выполняются неравенства

$$1 < x < x^2 < x^3 < \ldots . \qquad (4)$$

Действительно, умножая неравенство $1 < x$ на положительное число x, получаем неравенство $x < x^2$. Умножая это неравенство на x ($x > 0$), получаем неравенство $x^2 < x^3$ и т. д.

Неравенства (4) показывают, что на интервале $(1; +\infty)$ график функции $y = x^3$ расположен выше графика функции $y = x^2$, график функции $y = x^4$ расположен выше графика функции $y = x^3$ и т. д.

208. а) Возрастает ли на промежутке $[0; +\infty)$ функция $y = x^n$?
б) Дана функция $y = x^n$. К чему стремится y при $x \to +\infty$?

209. Дана функция $y = x^3$ ($x \geqslant 0$).
а) Назовите зависимую и независимую переменные.
б) Какова область значений данной функции?
в) Вычислите для данной функции значения $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$, $y(0{,}5)$, $y\left(\frac{1}{3}\right)$, $y\left(2\frac{1}{2}\right)$. Решение оформите в виде таблицы.

210. Дана функция $y = x^4$ ($x \geqslant 0$). Заполните таблицу значений функции при x, равном 0; 1; 2; 3; 0,5; $\frac{1}{3}$; 0,25; 1,5.

211. Дана функция $y = x^5$ ($x \geqslant 0$). Верно ли равенство:
а) $y(1) = 5$; б) $y(1) = 1$; в) $y(2) = 32$; г) $y(0) = 0$?

212. Составьте таблицу значений объёма куба, если длина его ребра (в метрах) принимает значения от 0,2 до 2 через 0,2.

213. а) Дана функция $y = x^4$ ($x \geqslant 0$). При каких значениях x значения функции равны 0; 1; 16; 81?
б) Дана функция $y = x^3$ ($x \geqslant 0$). При каких значениях x значения функции равны 0; 1; 8; 64?

214. При каких значениях x ($x \geqslant 0$) выполняется неравенство $y_1(x) < y_2(x)$, если:
а) $y_1(x) = x^6$, $y_2(x) = x^3$; б) $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^5$?

4.2. Свойства и графики функций $y = x^{2m}$ и $y = x^{2m+1}$

Рассмотрим теперь свойства функции $y = x^n$ на всей области её определения, т. е. для x, принадлежащих интервалу $(-\infty; +\infty)$.

Для чётных степеней выполняются равенства:

$$(-x)^2 = x^2, \; (-x)^4 = x^4, \; (-x)^6 = x^6.$$

Вообще если $n = 2m$ ($m \in N$) есть чётное натуральное число, то

$$(-x)^{2m} = x^{2m}.$$

Функциональная линия в курсе алгебры 7-9 классов

§ 5. Корень степени n

5.1. Понятие корня степени n

Пусть n — натуральное число и $n \geqslant 2$.

Корнем степени n из числа a называют такое число (если оно существует), n-я степень которого равна a.

Мы уже знаем, что корень степени 2 называют также *квадратным корнем*. Корень степени 3 называют ещё *кубическим корнем*.

Пример 1. Равенства $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $(-1)^3 = -1$, $(-2)^3 = -8$, $(-3)^3 = -27$ показывают, что числа $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ есть кубические корни соответственно из чисел $-27, -8, -1, 0, 1, 8, 27$.

Пример 2. Равенства $0^5 = 0$, $1^5 = 1$, $2^5 = 32$, $3^5 = 243$, $(-1)^5 = -1$, $(-2)^5 = -32$, $(-3)^5 = -243$ показывают, что числа $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ есть корни степени 5 соответственно из чисел $-243, -32, -1, 0, 1, 32, 243$.

Пример 3. Равенства $0^4 = 0$, $1^4 = 1$, $2^4 = 16$, $3^4 = 81$, $(-1)^4 = 1$, $(-2)^4 = 16$, $(-3)^4 = 81$ показывают, что есть два числа $+1$ и -1, которые являются корнями четвёртой степени из 1; есть два числа $+2$ и -2, являющиеся корнями четвёртой степени из 16; есть также два числа $+3$ и -3, являющиеся корнями четвёртой степени из 81. Далее, 0 есть корень четвёртой степени из 0.

Не существует корня четвёртой степени из отрицательного числа, потому что четвёртая степень любого действительного числа есть число неотрицательное. Здесь и далее речь идёт о существовании действительного числа, являющегося корнем из действительного числа.

В следующем пункте будут получены общие заключения, которые согласуются с рассмотренными выше частными фактами.

5.5. Функция $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geqslant 0$

Пусть n $(n \geqslant 2)$ — натуральное число. Каждому неотрицательному числу x поставим в соответствие число y, равное арифметическому корню степени n из x. Иными словами, на множестве неотрицательных чисел зададим функцию

$$y = \sqrt[n]{x}. \qquad (1)$$

Таким образом, областью определения функции (1) является множество неотрицательных чисел: $x \geqslant 0$.

Отметим следующие *свойства* функции (1).

1) Если $x = 0$, то $y = 0$.
2) Если $x > 0$, то $y > 0$.
3) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
4) Если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.
5) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ непрерывна на промежутке $[0; +\infty)$.

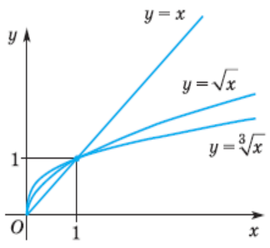


Рис. 59

В силу неравенств (4) график функции $y = \sqrt{x}$ на интервале $(1; +\infty)$ расположен ниже графика функции $y = x$, график функции $y = \sqrt[3]{x}$ расположен ниже графика функции $y = \sqrt{x}$ и т. д.

На рисунке 59 в одной и той же декартовой системе координат xOy изображены графики функций $y = x$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$ для неотрицательных чисел x.

329. а) Какова область значений функции $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$?
б) Каковы свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$?

330. Используя график функции

$$y = x^3 \ (x \geqslant 0),$$

определите приближённо $\sqrt[3]{y}$ для следующих значений y:
а) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8;
б) 0,5; 1,5; 2,5; 3,5; 4,5; 5,5; 6,5; 7,5; 8,5.

Постройте график функции (331—332):

331. а) $x = 2y$; б) $x = -5y$; в) $x = y^2$; г) $x = y^3$; д) $x = 2y - 4$; е) $x = y + 5$; ж) $x = 2y^2$; з) $x = 5y^3$ для $y \geqslant 0$.

332. а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = \sqrt[4]{x}$; в) $y = \sqrt[5]{x}$; г) $y = \sqrt[6]{x}$ для $x \geqslant 0$.

333. Используя графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = \sqrt[4]{x}$, сравните значения функций (единичные отрезки по 3 см):
а) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[4]{4}$; б) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{3}$;
в) $\sqrt[3]{0,5}$ и $\sqrt[4]{0,5}$; г) $\sqrt[3]{0,3}$ и $\sqrt[4]{0,3}$.

334. Известно, что:
а) $\sqrt[3]{a} > 1$; б) $\sqrt[3]{a} < 1$.
Верно ли, что a больше единицы? больше нуля?

335. Постройте график функции $y = \sqrt[4]{x}$. С помощью графика найдите:
а) при каких x справедливо неравенство $\sqrt[4]{x} > 1$;
б) при каких x справедливо неравенство $\sqrt[4]{x} < 1$.

336. Используя график функции $y = \sqrt[3]{x}$, покажите, что:
а) $\sqrt[3]{10} > \sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[3]{0,5} > \sqrt[3]{0,2}$; г) $\sqrt[3]{0,9} > \sqrt[3]{0,4}$.

337. Доказываем. Докажите неравенство:
а) $\sqrt[3]{10} > 2$; б) $3 < \sqrt[4]{100}$; в) $\sqrt{7} > \sqrt[4]{16}$; г) $\sqrt[4]{81} < \sqrt{10}$;
д) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$; е) $\sqrt[4]{3} < \sqrt[3]{4}$; ж) $\sqrt[5]{2} < \sqrt{5}$; з) $\sqrt{7} > \sqrt[4]{20}$.

338. Сравните числа:
а) 2 и $\sqrt[3]{7}$; б) $\sqrt[4]{12}$ и 2; в) $\sqrt[3]{3}$ и 1,5; г) $\sqrt[4]{75}$ и 3.

339. Найдите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число:
а) $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[4]{2}$; г) $\sqrt[4]{3}$.

340. Сравните натуральные числа m $(m \geqslant 2)$ и n $(n \geqslant 2)$, если:
а) $\sqrt[m]{5} > \sqrt[n]{5}$; б) $\sqrt[m]{8} < \sqrt[n]{8}$; в) $\sqrt[m]{0,2} > \sqrt[n]{0,2}$; г) $\sqrt[m]{0,3} < \sqrt[n]{0,3}$.

341. Сравните с единицей положительное число a, если:
а) $\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a}$; б) $\sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a}$; в) $\sqrt[5]{a} > \sqrt[4]{a}$; г) $\sqrt[6]{a} < \sqrt[5]{a}$.

342. Каким может быть натуральное число n $(n \geqslant 2)$, если:
а) $\sqrt[n]{16} \leqslant 4$; б) $\sqrt[n]{16} > 4$?

343. Найдите область определения функции:
а) $y = \sqrt{3x}$; б) $y = \sqrt[3]{-5x}$; в) $y = \sqrt[4]{2x-1}$; г) $y = \sqrt[5]{4-5x}$.

344. Постройте график функции:
а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = -\sqrt{x}$; в) $y = \sqrt{-x}$;
г) $y = -\sqrt{-x}$; д) $y = \sqrt{|x|}$; е) $y = \sqrt[3]{x}$, $x \geqslant 0$;
ж) $y = \sqrt[3]{|x|}$; з) $y = \sqrt[4]{x}$; и) $y = \sqrt[4]{-x}$;
к) $y = \sqrt[4]{|x|}$.

5.6*. Корень степени n из натурального числа

Пусть n $(n \geqslant 2)$ — натуральное число. Очевидно, что n-я степень натурального числа b есть натуральное число. Но не всякое натуральное число есть n-я степень некоторого натурального числа.

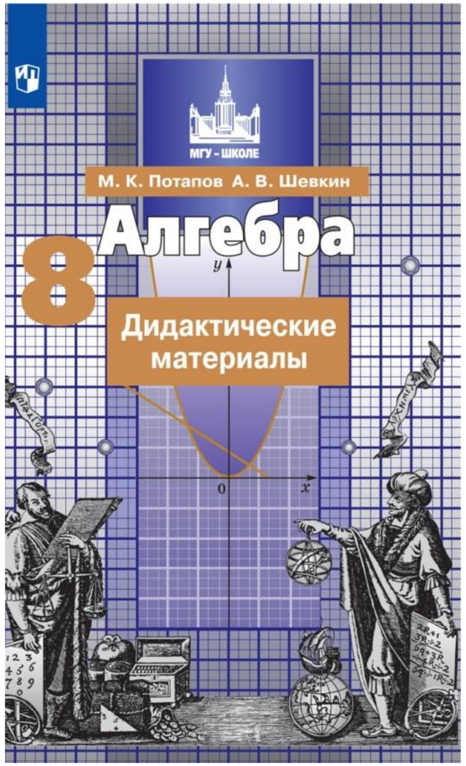
Например, среди натуральных чисел, не больших 100, только четыре, т. е. 4%, являются кубами натуральных чисел, а именно

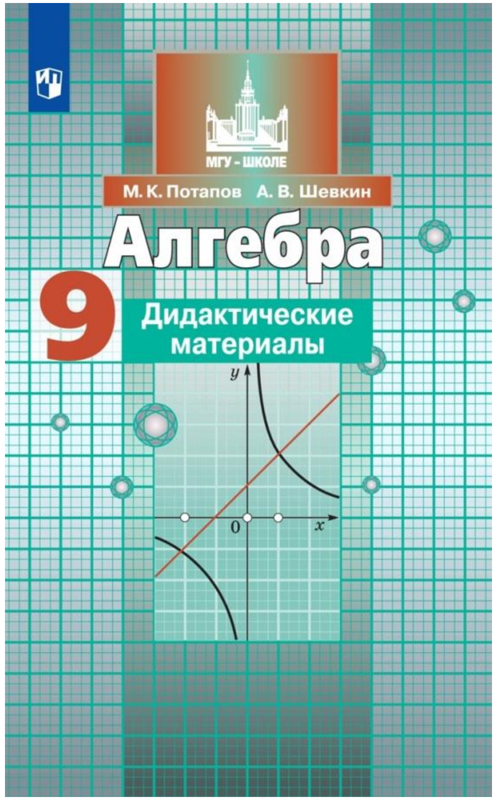
$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3.$$

Среди натуральных чисел, не больших 1000, только 10, т. е. 1%, являются кубами натуральных чисел, а именно

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ \ldots,\ 10^3.$$

Дидактические материалы в составе УМК





Дидактические материалы содержат самостоятельные и контрольные работы в четырёх вариантах. Ко всем вариантам контрольных работ имеются ответы. Задания первых двух вариантов соответствуют требованиям общеобразовательной программы. Уровень двух других вариантов выше. Эти варианты предназначены для работы с сильными учащимися, и классов с углублённым изучением математики. Дидактические материалы содержат раздел «Материалы для подготовки к самостоятельным работам», в котором приводится подробный разбор типов заданий, способы и образцы оформления решений. Работа с этим разделом повысит результативность выполнения самостоятельных и контрольных работ и усвоение темы в целом. Материалы для подготовки к самостоятельным работам содержат подробные объяснения решений заданий, а оформление решений учащимися может быть кратким.

Дидактические материалы в составе УМК

Материалы для подготовки к самостоятельным работам

1. Числовые неравенства. Числовые промежутки

Пример 1. Укажем три числа, заключенные между числами 5,3(24) и 5,(324).

Решение. 5,3(24) = 5,32424..., 5,(324) = 5,32432... . Первые четыре цифры в десятичной записи чисел совпадают, а пятые цифры различны, поэтому для отыскания трех чисел, заключенных между данными числами, увеличим шестую цифру меньшего из них. Получим

$$5{,}32424... < 5{,}32425 < 5{,}32426 < 5{,}32427 < 5{,}32432... .$$

Ответ. 5,32425, 5,32426, 5,32427.

Пример 2. Для чисел a и b справедливы неравенства $35 \leqslant a \leqslant 39$ и $6 \leqslant b \leqslant 7$. Между какими ближайшими целыми числами заключено число:

а) $a + b$; б) $a \cdot b$; в) $a - b$; г) $a : b$?

Решение. а) Так как $35 + 6 \leqslant a + b \leqslant 39 + 7$, то $41 \leqslant a + b \leqslant 46$.
б) Так как $35 \cdot 6 \leqslant a \cdot b \leqslant 39 \cdot 7$, то $210 \leqslant a \cdot b \leqslant 273$.
в) Так как $35 - 7 \leqslant a - b \leqslant 39 - 6$, то $28 \leqslant a - b \leqslant 33$.
г) Так как $35 : 7 \leqslant a : b \leqslant 39 : 6$, то $5 \leqslant a : b \leqslant 6{,}5$. Число $a : b$ заключено между ближайшими целыми числами 5 и 7.
Ответ. а) 41 и 46; б) 210 и 273; в) 28 и 33; г) 5 и 7.

Пример 3. Докажем свойство числовых неравенств:

а) Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
б) Если $c < 0$ и $a > b$, то $ac < bc$.

Решение. а) К обеим частям первого неравенства прибавим по числу c, а к обеим частям второго неравенства прибавим по числу b, получим верные неравенства

$$a > b, \qquad c > d,$$
$$a + c > b + c; \qquad b + c > b + d.$$

Так как $a + c > b + c$ и $b + c > b + d$, то $a + c > b + d$, что и требовалось доказать.
б) Если $c < 0$ и $a > b$, то $-c > 0$ и $-a < -b$.
Умножив обе части неравенства $-a < -b$ на положительное число $-c$, получим верное неравенство $ac < bc$, что и требовалось доказать.

Пример 4. Изобразим на координатной оси числовые промежутки $[-5; 4)$ и $(-3; 7]$; укажем объединение и пересечение этих промежутков.

Решение. Числовые промежутки $[-5; 4)$ и $(-3; 7]$ изображены на рисунке 1.

Объединением данных числовых промежутков является числовой промежуток $[-5; 7]$, а пересечением — числовой промежуток $(-3; 4)$.

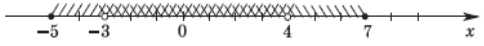


Рис. 1

Ответ. $[-5; 7]$, $(-3; 4)$.

Пример 5. Первый путник проходит расстояние между двумя городами за a ч, а второй — за b ч. Однажды они вышли одновременно из этих городов навстречу друг другу и встретились через t ч. Укажем числовой промежуток наименьшей длины, которому принадлежит t, если $4 \leqslant a \leqslant 5$ и $2 \leqslant b \leqslant 4$.

Решение. Так как $t = 1 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, то наибольшее значение t получится тогда, когда положительное число $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ будет наименьшим, т. е. когда a и b будут наибольшими: $a = 5$ и $b = 4$, $t_{\text{наиб}} = 1 : \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) = 2\frac{2}{9}$. Наименьшее значение t получится тогда, когда положительное число $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ будет наибольшим, т. е. когда a и b будут наименьшими: $a = 4$ и $b = 2$, $t_{\text{наим}} = 1 : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = 1\frac{1}{3}$. Итак, $1\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 2\frac{2}{9}$.

Ответ. $1\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 2\frac{2}{9}$.

2. Функция. График функции

Пример 1. Дан график некоторой функции (рис. 2). Определим:

а) ординату точки графика, имеющей абсциссу 1;
б) абсциссу точки графика, имеющей ординату 4;
в) промежуток, на котором эта функция возрастает (убывает).

Решение. а) Абсциссу 1 имеет точка A графика, ее ордината 3.
б) Ординату 4 имеет точка B графика, ее абсцисса 3.

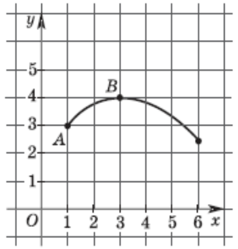


Рис. 2

в) Эта функция возрастает на отрезке [1; 3] и убывает на отрезке [3; 6].

Ответ. а) 3; б) 3; в) функция возрастает на отрезке [1; 3] и убывает на отрезке [3; 6].

Пример 2. Дана функция $y = x^2$. Сравним:
а) $y(10)$ и $y(11)$; б) $y(-9)$ и $y(-8)$; в) $y(-3)$ и $y(3)$.

Решение. а) Так как $y(10) = 10^2 = 100$, а $y(11) = 11^2 = 121$ и $100 < 121$, то $y(10) < y(11)$.
б) Так как $y(-9) = (-9)^2 = 81$, а $y(-8) = (-8)^2 = 64$ и $81 > 64$, то $y(-9) > y(-8)$.
в) Так как $y(-3) = (-3)^2 = 9$, а $y(3) = 3^2 = 9$, то $y(-3) = y(3)$.
Ответ. а) $y(10) < y(11)$; б) $y(-9) > y(-8)$; в) $y(-3) = y(3)$.

Пример 3. а) Построим график функции $y = -\frac{1}{x}$ для $x \in (0; +\infty)$.
б) С помощью определения докажем, что функция $y = -\frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$.

Решение. а) Заполним таблицу значений функции для некоторых значений аргумента x.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$y = -\frac{1}{x}$	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

Отметим на координатной плоскости xOy точки, координаты которых занесены в таблицу, и соединим их непрерывной линией (рис. 3), получим график функции $y = -\frac{1}{x}$ для $x \in (0; +\infty)$.

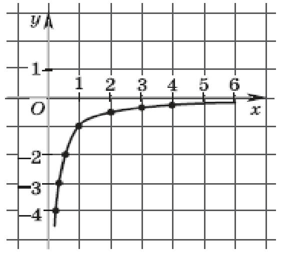


Рис. 3

б) Пусть $0 < x_1 < x_2$. Определим знак разности $y_1 - y_2$:

$$y_1 - y_2 = -\frac{1}{x_1} - \left(-\frac{1}{x_2}\right) = -\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} < 0,$$ так как $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и $x_1 < x_2$.

Так как $y_1 - y_2 < 0$, то $y_1 < y_2$, т. е. большему значению аргумента (x_2) соответствует большее значение функции (y_2), следовательно, функция $y = -\frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$.

Дидактические материалы в составе УМК

17. Квадратичная функция

Пример 1. Построим график функции:

а) $y = 2x^2 - 3$;
б) $y = 2(x-4)^2$;
в) $y = 2(x-4)^2 - 3$.

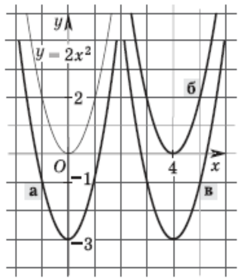


Рис. 13

Решение. а) График функции $y = 2x^2$ изображен на рисунке 13 тонкой линией. График заданной функции получим из него параллельным переносом вниз на 3 единицы.

б) График получим из графика функции $y = 2x^2$ параллельным переносом вправо на 4 единицы.

в) График получим из графика функции $y = 2x^2$ параллельным переносом вправо на 4 единицы и вниз на 3 единицы.

Пример 2. На рисунке 14 изображены графики функций, каждый из которых получен параллельным переносом графика функции $y = x^2$. Определим формулы, задающие функции, графики которых изображены.

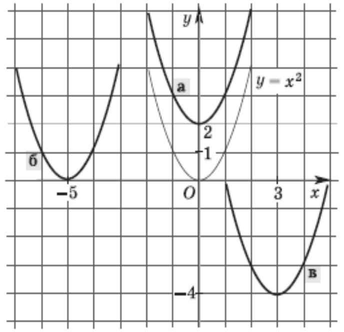


Рис. 14

Решение. а) График функции получен из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вверх на 2 единицы, следовательно, получился график функции $y = x^2 + 2$.

б) График функции получен из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом влево на 5 единиц, следовательно, получился график функции $y = (x+5)^2$.

в) График функции получен из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вправо на 3 единицы и вниз на 4 единицы, следовательно, получился график функции $y = (x-3)^2 - 4$.

Ответ. а) $y = x^2 + 2$; б) $y = (x+5)^2$; в) $y = (x-3)^2 - 4$.

Пример 3. Построим график функции $y = x^2 + 4x$. Определим, при каком значении аргумента функция достигает своего наименьшего значения, чему равно это значение.

Решение. *I способ.* Выделим полный квадрат:

$$x^2 + 4x = (x^2 + 4x + 4) - 4 = (x+2)^2 - 4.$$

График функции $y = (x+2)^2 - 4$ получим из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом влево на 2 единицы и вниз на 4 единицы (рис. 15).

II способ. Графиком данной квадратичной функции является парабола, ветви которой направлены вверх, так как $a = 1 > 0$. Вычислим абсциссу вершины параболы: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$. Найдем координаты нескольких точек графика:

x	-4	-3	-2	-1	0
y	0	-3	-4	-3	0

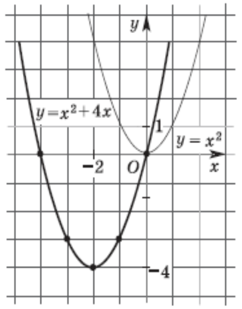


Рис. 15

Построим параболу по точкам (см. рис. 15).

Наибольшего значения функция не достигает, а наименьшего значения −4 она достигает в точке $x = -2$.

Ответ. Наименьшего значения −4 функция достигает в точке $x = -2$.

Пример 4. Докажем, что функция $y = x^2 - 2x$ убывает на промежутке $(-\infty; 1]$.

Решение. Пусть $x_1 < x_2 \leqslant 1$. Вычислим разность $y_1 - y_2$:

$$y_1 - y_2 = (x_1^2 - 2x_1) - (x_2^2 - 2x_2) = x_1^2 - 2x_1 - x_2^2 + 2x_2 =$$
$$= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 2(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2).$$

Так как $x_1 < x_2$, то $x_1 - x_2 < 0$, так как $x_1 < 1$, а $x_2 \leqslant 1$, то $x_1 + x_2 < 2$, следовательно, $y_1 - y_2 > 0$. Но тогда $y_1 > y_2$, т. е.

18*. Функция $y = \frac{k}{x - x_0} + y_0$

Пример 1. Построим график функции

$$y = \frac{-3}{x-3} + 2.$$

Решение. График функции $y = \frac{-3}{x}$ изображен на рисунке 17 тонкой линией. График функции $y = \frac{-3}{x-3} + 1$ получим из графика функции $y = \frac{-3}{x}$ параллельным переносом вправо на 3 единицы и вверх на 1 единицу (см. рис. 17).

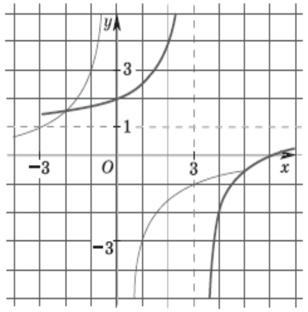


Рис. 17

Пример 2. Определим по данному графику функции $y = \frac{k}{x - x_0} + y_0$ (рис. 18) каждое из чисел k, x_0 и y_0.

Решение. График функции $y = \frac{k}{x - x_0} + y_0$ получен из графика функции $y = \frac{k}{x}$ параллельным переносом влево на 2 единицы и вниз на 3 единицы, поэтому $x_0 = -2$, $y_0 = -3$.

Чтобы найти k, подставим в уравнение $y = \frac{k}{x+2} - 3$ координаты точки $(0; -2)$, принадлежащей графику, получим уравнение

$$-2 = \frac{k}{2} - 3,$$

имеющее единственный корень $k = 2$.

Ответ. $k = 2$, $x_0 = -2$, $y_0 = -3$.

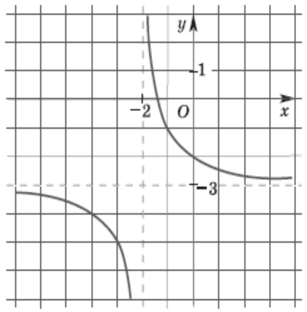


Рис. 18

Дидактические материалы в составе УМК

20*. Графики функций, содержащих модули

Пример 1. Построим график функции:

а) $y = -4|x-3|$; б) $y = \left|\frac{1}{3}x+1\right|-2$.

Решение. а) Построим график функции $y = -4|x|$, перенесем его вправо на 3 единицы, получим график функции $y = -4|x-3|$ (рис. 20).

б) Так как функцию можно записать в виде $y = \frac{1}{3}|x+3|-2$, то сначала построим график функции $y = \frac{1}{3}|x|$, потом перенесем его влево на 3 единицы и вниз на 2 единицы, получим график функции $y = \left|\frac{1}{3}x+1\right|-2$ (рис. 21).

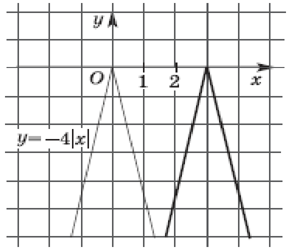


Рис. 20

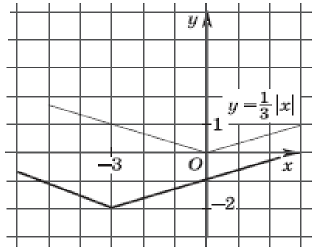


Рис. 21

Пример 2. Построим график функции $y = ||x|-2|-1|$.

Решение. Построим графики функций в следующем порядке (рис. 22):

1) $y = |x|-2$, 2) $y = ||x|-2|$,

3) $y = ||x|-2|-1$, 4) $y = |||x|-2|-1|$.

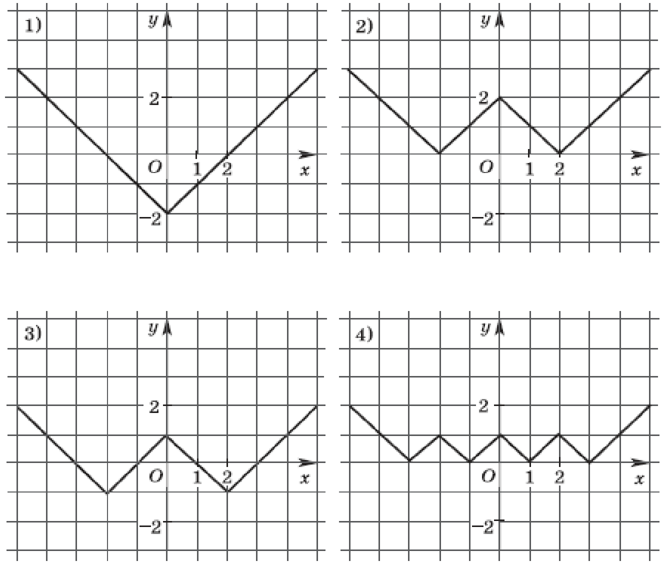


Рис. 22

Пример 3. Построим график функции:

а) $y = |x^2-2x-3|$;

б) $y = x^2-2|x|-3$;

в) $y = |x^2-2|x|-3|$.

Решение. а) Построим график функции $y = x^2-2x-3$. Неотрицательную часть ($y \geqslant 0$) графика функции сохраним, а отрицательную ($y < 0$) отразим симметрично относительно оси Ox. Получим график функции $y = |x^2-2x-3|$ (рис. 23).

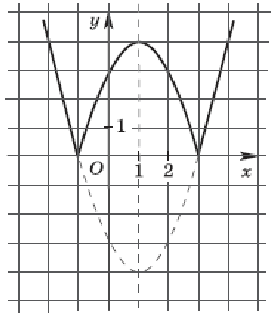


Рис. 23

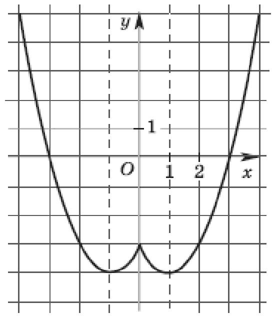


Рис. 24

б) Так как функция $y = x^2 - 2|x| - 3$ четная, то сначала построим ту часть графика функции $y = x^2-2x-3$, для которой $x \geqslant 0$. Затем отразим ее симметрично относительно оси Oy, получим график функции $y = x^2-2|x|-3$ (рис. 24).

в) Неотрицательную часть ($y \geqslant 0$) графика функции $y = x^2-2|x|-3$ сохраним, а отрицательную ($y < 0$) отразим симметрично относительно оси Ox. Получим график функции $y = |x^2-2|x|-3|$ (рис. 25).

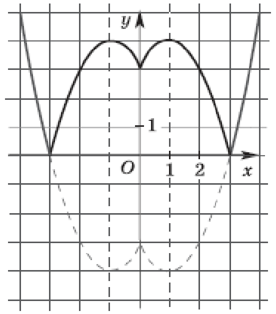


Рис. 25

Пример 4. Построим график функции

$$y = \sqrt{x^2-2x+1} - \sqrt{x^2+6x+9}.$$

Решение. Так как $y = \sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(x+3)^2} = |x-1| - |x+3|$, то область определения данной функции есть $\boldsymbol{R}$. Построим график данной функции на каждом из промежутков, на которые точки -3 и 1 разбивают область определения функции: $(-\infty; -3)$, $[-3; 1)$, $[1; +\infty)$.

1) Если $x \in (-\infty; -3)$, то $|x-1| = -(x-1)$, $|x+3| = -(x+3)$. Поэтому на промежутке $(-\infty; -3)$ функция задается формулой $y = -x+1+x+3$, т. е. $y = 4$, ее график на этом про-

Дидактические материалы в составе УМК

Самостоятельные работы

С—1 Числовые неравенства. Числовые промежутки

I вариант

1. Укажите три числа, заключенные между числами 4,3(57) и 4,(357).
2. Изобразите на координатной оси числовой промежуток, соответствующий неравенствам:
   а) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; б) $3 < x \leqslant 5$; в) $x > 4$; г) $x \leqslant 0$.
3. С помощью знаков $\in$ и $\notin$ запишите, принадлежит ли данное число указанному числовому промежутку:
   а) 15; $(-\infty;\ 0)$; б) -1; $[-2;\ 0)$;
   в) 0; $(0;\ 9)$; г) 7; $[2;\ 7]$.
4. Изобразите на координатной оси числовые промежутки $(-4;\ 3]$ и $[-1;\ 6)$; укажите объединение и пересечение этих промежутков.
5. Для чисел a и b справедливы неравенства $15 \leqslant a \leqslant 16$ и $4 \leqslant b \leqslant 5$. Между какими ближайшими целыми числами заключено число: а) $a+b$; б) $a \cdot b$; в) $a-b$; г) $a : b$?
6. Докажите свойство числовых неравенств: если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

II вариант

1. Укажите три числа, заключенные между числами 5,4(16) и 5,(416).
2. Изобразите на координатной оси числовой промежуток, соответствующий неравенствам:
   а) $-2 < x < -1$; б) $-4 \leqslant x < 1$; в) $x < 0$; г) $x \geqslant 8$.
3. С помощью знаков $\in$ и $\notin$ запишите, принадлежит ли данное число указанному числовому промежутку:
   а) 5; $(4;\ +\infty)$; б) -2; $[-1;\ 3)$;
   в) 4; $(1;\ 4)$; г) 3; $[3;\ 8]$.
4. Изобразите на координатной оси числовые промежутки $(-3;\ 4]$ и $[3;\ 7)$; укажите объединение и пересечение этих промежутков.
5. Для чисел a и b выполняются неравенства $20 \leqslant a \leqslant 21$ и $3 \leqslant b \leqslant 4$. Между какими ближайшими целыми числами заключено число: а) $a+b$; б) $a \cdot b$; в) $a-b$; г) $a : b$?
6. Докажите свойство числовых неравенств: если $c < 0$ и $a < b$, то $ac > bc$.

3. Постройте график функции:
   а) $y = [x] - 5$; б) $y = \{x + 3\}$.
4. Подберите числа $b \neq 1$ и $c \neq 3$, для которых совпадают графики функций $y = [x-1] + 3$ и $y = [x - b] + c$.

С—17 Квадратичная функция

I вариант

1. Постройте график функции:
   а) $y = x^2 - 4$;
   б) $y = (x+3)^2$;
   в) $y = (x+3)^2 - 4$.
2. На рисунке 46 изображены графики функций, каждый из которых получен параллельным переносом графика функции $y = x^2$. Какой формулой задана каждая из функций?
3. Докажите, что функция $y = 5x^2 + 7$ возрастает на промежутке $[0;\ +\infty)$.
4. Постройте график функции $y = x^2 - 6x$. При каком значении аргумента функция достигает своего наименьшего значения? Чему равно это значение?
5. По данному графику функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 47) определите знак каждого из чисел a, b и c.

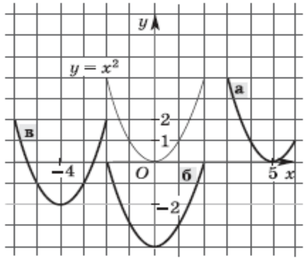


Рис. 46

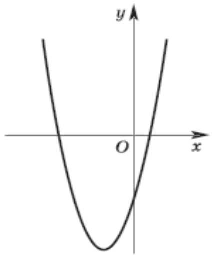


Рис. 47

II вариант

1. Постройте график функции:
   а) $y = x^2 + 4$;
   б) $y = (x-3)^2$;
   в) $y = (x-3)^2 + 4$.

С—18* Функция $y = \dfrac{k}{x - x_0} + y_0$

I вариант

1. Постройте график функции:
   а) $y = \dfrac{4}{x-3}$;
   б) $y = \dfrac{4}{x-3} + 1$.
2. По данному графику функции $y = \dfrac{k}{x - x_0} + y_0$ (рис. 54) определите каждое из чисел k, x_0 и y_0.
3. Постройте график функции $y = \dfrac{2x+7}{x+2}$.

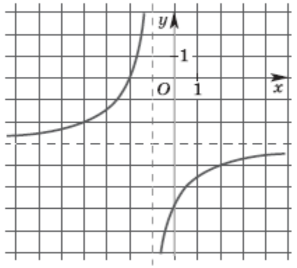


Рис. 54

II вариант

1. Постройте график функции:
   а) $y = \dfrac{4}{x-1}$;
   б) $y = \dfrac{4}{x-1} + 3$.
2. По данному графику функции $y = \dfrac{k}{x - x_0} + y_0$ (рис. 55) определите каждое из чисел k, x_0 и y_0.
3. Постройте график функции $y = \dfrac{2x+9}{x+3}$.

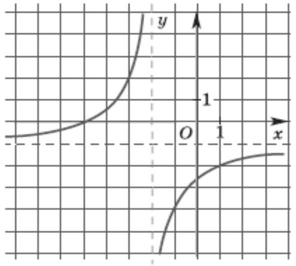


Рис. 55

III вариант

1. Постройте график функции:
   а) $y = \dfrac{-4}{x+1}$;
   б) $y = \dfrac{-4}{x+1} - 1$.
2. По данному графику функции $y = \dfrac{k}{x - x_0} + y_0$ (рис. 56) определите каждое из чисел k, x_0 и y_0.
3. Постройте график функции $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$.

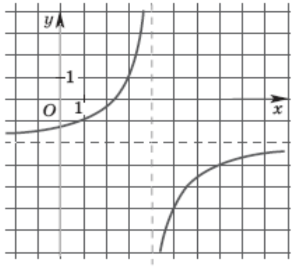


Рис. 56

Дидактические материалы в составе УМК

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К—1 *I вариант*

1. Изобразите на координатной оси числовой промежуток: а) $[-3;\ 2]$; б) $(-5;\ -2]$; в) $(-2;\ 5)$.
Укажите наибольшее и наименьшее целое число, принадлежащее этому числовому промежутку.
2. Дана функция $y = \frac{1}{x}$.
а) Принадлежат ли точки $A(-0{,}1;\ 10)$, $B(-0{,}2;\ -5)$, $C(2;\ 0{,}5)$ графику этой функции?
б) Какому числовому промежутку принадлежат значения y, если $x \in [1;\ 2]$?
3. Постройте график функции $y = x^2$. Возрастает или убывает эта функция на промежутке: а) $(-\infty;\ 0]$; б) $[0;\ +\infty)$?
4*. Какому числовому промежутку принадлежат значения выражения $A = \frac{2a^2 - 2}{a - 3} \cdot \left(\frac{2}{a+1} - \frac{1}{a-1}\right) + 3a$, если $a \in \left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$?
5*. Первая бригада выполнит задание за a дней, вторая бригада выполнит то же задание за b дней, а при совместной работе они выполнят то же задание за t дней. Какому числовому промежутку наименьшей длины принадлежат значения t, если $5 \leqslant a \leqslant 8$ и $20 \leqslant b \leqslant 24$?

К—1 *II вариант*

1. Изобразите на координатной оси числовой промежуток: а) $[-2;\ 3]$; б) $(-6;\ -3]$; в) $(-5;\ 3)$.
Укажите наибольшее и наименьшее целое число, принадлежащее этому числовому промежутку.
2. Дана функция $y = x^2$.
а) Принадлежат ли точки $A(-10;\ -100)$, $B(8;\ 64)$, $C(-6;\ 36)$ графику этой функции?
б) Какому числовому промежутку принадлежат значения y, если $x \in [1;\ 5]$?
3. Постройте график функции $y = \frac{1}{x}$. Возрастает или убывает эта функция на промежутке: а) $(-\infty;\ 0)$; б) $(0;\ +\infty)$?
4*. Какому числовому промежутку принадлежат значения выражения $A = \frac{4a^2 - 4}{a + 3} \cdot \left(\frac{2}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right) + 2a$, если $a \in \left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right)$?
5*. Первая труба наполнит бассейн за a ч, вторая труба наполнит бассейн за b ч, а при совместной работе они наполнят тот же бассейн за t ч. Какому числовому промежутку наименьшей длины принадлежат значения t, если $20 \leqslant a \leqslant 24$ и $30 \leqslant b \leqslant 40$?

К—5 *I вариант*

1. Постройте график функции:
а) $y = -3x$; б) $y = 2x - 1$.
Является ли функция возрастающей (убывающей) на множестве R?
2. Постройте график функции:
а) $y = -2x^2$; б) $y = (x + 2)^2 - 1$.
Найдите промежутки возрастания (убывания) функции. Укажите значение x, при котором функция достигает наибольшего (наименьшего) значения.
3. График функции $y = kx + l$ проходит через точки $A(0;\ -3)$ и $B(2;\ 1)$. Найдите k и l.
4. Постройте график функции $y = x^2 - 6x + 5$. Определите по графику, на каком числовом промежутке функция принимает отрицательные значения.
5*. Выпуская в день на 2 станка больше, чем намечено по плану, завод выпустил 80 станков за 2 дня до срока. Сколько станков в день выпускал завод?

К—5 *II вариант*

1. Постройте график функции:
а) $y = 2x$; б) $y = -3x + 2$.
Является ли функция возрастающей (убывающей) на множестве R?
2. Постройте график функции:
а) $y = -3x^2$; б) $y = (x - 1)^2 - 14$.
Найдите промежутки возрастания (убывания) функции. Укажите значение x, при котором функция достигает наибольшего (наименьшего) значения.
3. График функции $y = kx + l$ проходит через точки $A(0;\ 5)$ и $B(2;\ 1)$. Найдите k и l.
4. Постройте график функции $y = -x^2 + 4x - 3$. Определите по графику, на каком числовом промежутке функция принимает положительные значения.
5*. Поезд был задержан на станции на 12 мин. Чтобы пройти участок пути в 60 км без опоздания, машинист увеличил скорость поезда на 10 км/ч. С какой скоростью шел поезд?

К—5 *III вариант*

1. Постройте график функции:
а) $y = \frac{1}{2}x - 2$; б) $y = \left|\frac{1}{2}x - 2\right|$; в) $y = \frac{1}{2}|x| - 2$.
С помощью определения докажите, что функция $y = \frac{1}{2}x - 2$ является возрастающей на множестве R.

2. Постройте график функции:
а) $y = -x^2 + 2x + 3$; б) $y = |-x^2 + 2x + 3|$; в) $y = |-x^2 + 2|x| + 3|$.
При каких значениях x значения функции $y = -x^2 + 2x + 3$ положительны?
3. Материальная точка движется по оси Os по закону: $s = 20t - 5t^2$, где s — координата точки, t — время движения (в секундах). Укажите момент времени, когда координата s точки будет наибольшей.
4*. Бригада трактористов должна была вспахать 168 га к определенному сроку. Но ежедневно бригада вспахивала на 2 га больше, чем намечено по плану, поэтому за 1 день до срока она перевыполнила задание на 14 га. Сколько гектаров в день вспахивала бригада?
5*. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 6x + 8}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$.

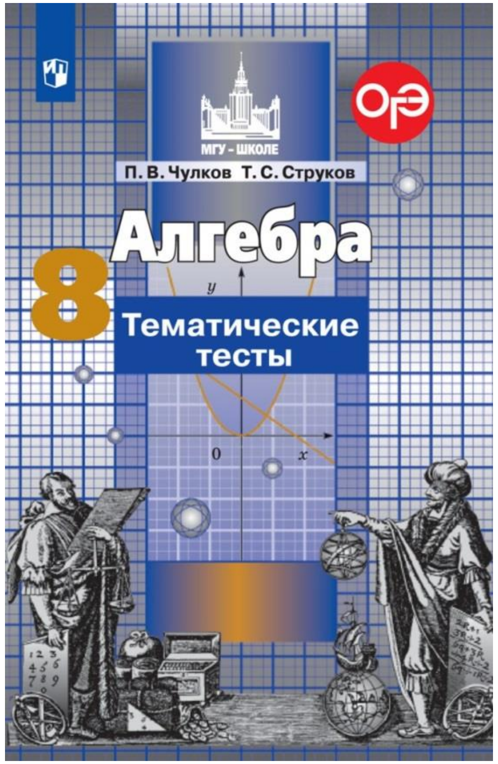
К—5 *IV вариант*

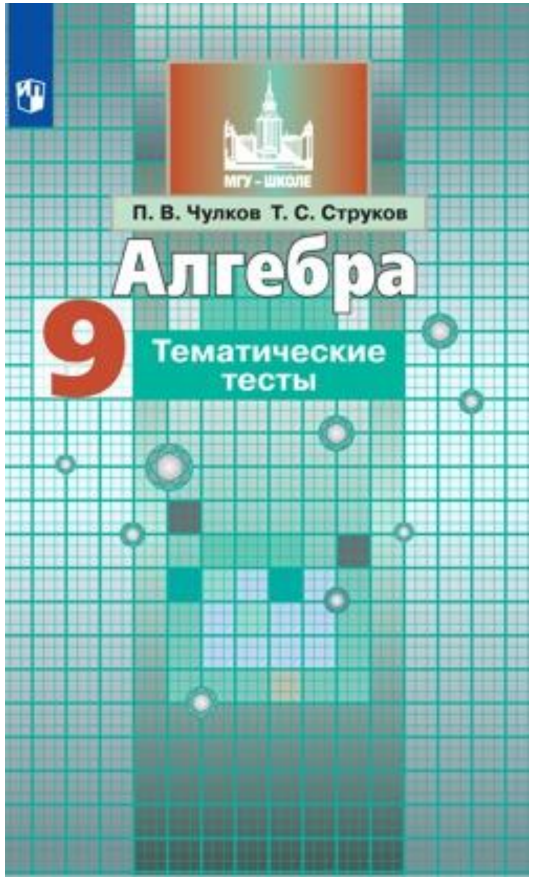
1. Постройте график функции:
а) $y = -\frac{1}{2}x + 3$; б) $y = \left|-\frac{1}{2}x + 3\right|$; в) $y = -\frac{1}{2}|x| + 3$.
С помощью определения докажите, что функция $y = -\frac{1}{2}x + 3$ является убывающей на множестве R.
2. Постройте график функции:
а) $y = x^2 - 4x + 3$; б) $y = |x^2 - 4x + 3|$; в) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.
При каких значениях x значения функции $y = x^2 - 4x + 3$ отрицательны?
3. Материальная точка движется по оси Os по закону: $s = -30t + 5t^2$, где s — координата точки, t — время движения (в секундах). Укажите момент времени, когда координата s точки будет наименьшей.
4*. На середине перегона длиной 224 км поезд был задержан на 13 мин. Хотя машинист увеличил скорость поезда на 10 км/ч, в пункт назначения поезд прибыл с опозданием на 1 мин. С какой скоростью шел поезд после остановки?
5*. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}$.

К—6 *I вариант*

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = -2, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 16. \end{cases}$
2. Решите графическим способом систему уравнений:
а) $\begin{cases} y = 0{,}5x + 3, \\ y = 2x - 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x + 2, \\ y = x^2 - 6x + 8. \end{cases}$

Тематические тесты в составе УМК





Тематические тесты содержат тестовые задания по темам учебников. Цель пособий — помочь учителю в организации текущего контроля с использованием тестирования.

Тесты даны в четырёх вариантах одинаковой трудности. При подготовке заданий и ответов к ним учтены наиболее вероятные ошибки учащихся, что позволяет учителю провести оперативный анализ степени усвоения темы.

Каждый тест состоит из двух частей.

В части ***А*** представлены 6 заданий с выбором ответа. Учащимся необходимо выбрать один ответ из четырёх предложенных и отметить его номер (обвести, поставить галочку) непосредственно в тестовом задании.

В части ***В*** даны 6 заданий, в которых требуется записать краткий ответ. Вспомогательные записи, если они необходимы, учащиеся выполняют на отдельном листе, предъявлять их не требуется. Ко всем тестовым заданиям в конце книги приведены ответы.

Тематические тесты в составе УМК

Тест 2. Функции $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$

Вариант 1

A1 Дана функция $y = \frac{1}{x}$. Вычислите $y(2) - y(-1)$.

1) $-\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{3}{2}$ 4) другой ответ

A2 На каком из указанных отрезков функция $y = x^2$ является возрастающей?

1) $[-3; 1]$ 2) $[0; 4]$ 3) $[-2; 4]$ 4) $[-3; -2]$

A3 Какая из указанных точек не принадлежит графику функции $y = x^2$?

1) $(-2; 4)$ 2) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ 3) $(1; 1)$ 4) $(4; 2)$

A4 Какое из указанных значений функции $y = \frac{1}{x}$ наибольшее?

1) $y\left(-\frac{1}{2}\right)$ 2) $y\left(-\frac{1}{3}\right)$ 3) $y\left(\frac{1}{2}\right)$ 4) $y\left(\frac{1}{3}\right)$

A5 На каком из указанных отрезков функция $y = \frac{1}{x}$ является непрерывной?

1) $[-3; 1]$ 2) $[0; 4]$ 3) $[-2; 4]$ 4) $[-3; -2]$

A6 Выберите функцию, графику которой принадлежат точки $(-1; 1)$ и $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$.

1) $y = x^2$ 2) $y = \frac{1}{x}$ 3) $y = -\frac{1}{x}$ 4) $y = x$

B1 Найдите значение функции $y = x^2$ при $x = -0{,}03$.

Ответ: ____________

B2 Вычислите $\frac{y(-2) - y(3)}{y(6)}$, если $y = \frac{1}{x}$.

Ответ: ____________

B3 Вычислите $\frac{y(-4) \cdot y(4)}{y(-8)}$, если $y = x^2$.

Ответ: ____________

13

B4 Для функции $y = x^2$ расположите в порядке убывания числа $y(-2)$, $y(3)$, $y(0)$, $y(-4)$.

Ответ: ____________

B5 Упростите выражение $\frac{y(a) - y(b)}{a - b}$, если $y = x^2$.

Ответ: ____________

B6 Упростите выражение $\frac{y(a^3) - y(b^3)}{y(a) - y(b)} \cdot a^2b^2$, если $y = \frac{1}{x}$.

Ответ: ____________

Тест 6. Линейная функция

Вариант 1

A1 График прямой пропорциональности проходит через точку $P(5; -1)$. Какой формулой можно задать эту функцию?

1) $y = \frac{1}{5}x$ 2) $y = 5x$ 3) $y = -5x$ 4) $y = -\frac{1}{5}x$

A2 Какая из данных точек принадлежит графику функции $y = 3x + 1$?

1) $(1; 5)$ 2) $(-1; 5)$ 3) $(-2; -5)$ 4) $(2; -5)$

A3 Какому из данных уравнений наиболее соответствует график функции, изображённый на рисунке 5?

1) $y = x + 1$ 2) $y = -x + 1$
3) $y = x - 1$ 4) $y = -x - 1$

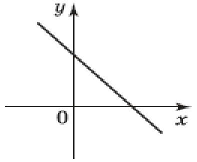
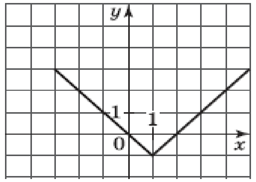


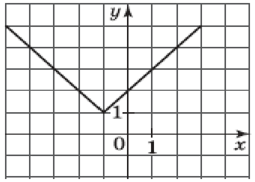
Рис. 5

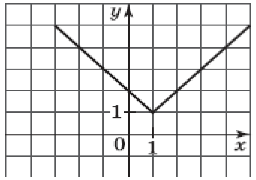
A4 В какой из координатных четвертей пересекаются графики функций $y = 3x - 2$ и $y = -3x + 4$?

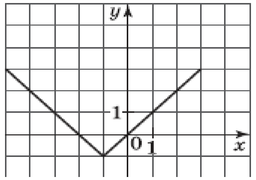
1) в I четверти 2) во II четверти
3) в III четверти 4) в IV четверти

A5 Какой из приведённых графиков наиболее соответствует графику функции $y = |x + 1| - 1$?

1)


2)


3)


4)


45

Тематические тесты в составе УМК

А6 Выберите значения k и b, при которых график линейной функции $y = kx + b$ параллелен графику функции $y = -7x + 8$.

1) $k = 8$, $b = 3$ 2) $k = -7$, $b = 3$
3) $k = -7$, $b = 8$ 4) другой ответ

В1 Какие значения может принимать функция

$$y = |x - 3| + 3?$$

Ответ: ____________

В2 Найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = 2x - 3$ и $y = -3x + 2$.

Ответ: ____________

В3 Дана функция $y = -2x - 1$. При каких значениях x значения y больше 1?

Ответ: ____________

В4 При каком значении k графики линейных функций $y = kx + 2$ и $y = 4x + 12$ пересекаются в точке $(-2; 4)$?

Ответ: ____________

В5 Какой формулой может быть задана прямая, проходящая через точки $(0; 2)$ и $(1; 5)$?

Ответ: ____________

В6 Напишите формулу зависимости пути от времени $s(t)$, график которой изображён на рисунке 6.

Ответ: ____________

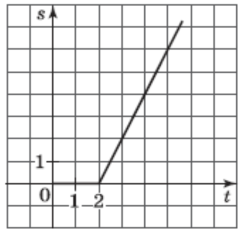


Рис. 6

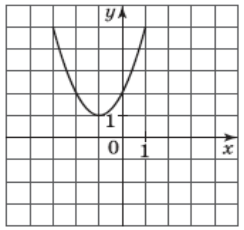
Тест 7. Квадратичная функция

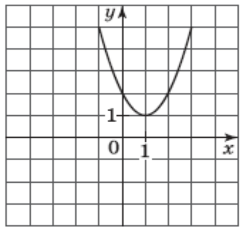
Вариант 1

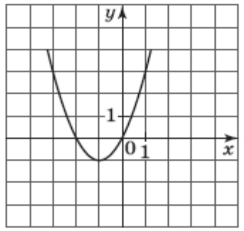
А1 Функция задана формулой $y = \frac{3}{4}x^2$. Выберите неверное равенство.

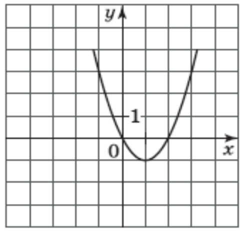
1) $y(-2) = 3$ 2) $y(-3) = 6{,}75$
3) $y(-4) = 12$ 4) $y(-5) = 18{,}25$

А2 Какой из приведённых графиков наиболее соответствует графику функции $y = (x + 1)^2 - 1$?

1)


2)


3)


4)


А3 Какие координаты имеет точка пересечения параболы $y = -2x^2 + 3x - 1$ с осью ординат?

1) $(0; 1)$ 2) $(-1; 0)$ 3) $(0; -1)$ 4) другой ответ

А4 В какой из координатных четвертей расположена вершина параболы $y = 2x^2 + 3x - 1$?

1) в I четверти 2) во II четверти
3) в III четверти 4) в IV четверти

А5 Какой формулой задаётся функция, график которой может быть получен параллельным переносом параболы $y = -2x^2$ так, что её вершина окажется в точке $(2; -2)$?

1) $y = -2(x - 2)^2 - 2$ 2) $y = -2(x + 2)^2 - 2$
3) $y = -2(x - 2)^2 + 2$ 4) $y = -2(x + 2)^2 + 2$

А6 Найдите наибольшее натуральное значение a, при котором функция $y = x^2 + ax + 1$ принимает положительные значения при всех значениях x.

1) 1 2) 2 3) 3 4) другой ответ

В1 Найдите область значений функции $y = x^2 - 3$.

Ответ: ____________

В2 При каких значениях x значение функции $y = 2x^2 - 3x + 1$ равно 3?

Ответ: ____________

В3 Функция задана формулой $y = 2(x + 1)^2 + 0{,}5$, где $0 \leqslant x \leqslant 3$. Найдите наименьшее значение y.

Ответ: ____________

В4 При каких значениях a график функции $y = ax^2 - 5x - 3$ проходит через точку $K(-1; 3)$?

Ответ: ____________

В5 Найдите расстояние между точками пересечения параболы $y = x^2 + 4x - 4$ с осью абсцисс.

Ответ: ____________

В6 На рисунке 13 изображён график функции $y = ax^2 + bx + c$. Сравните с нулём числа a, b, c.

Ответ: ____________

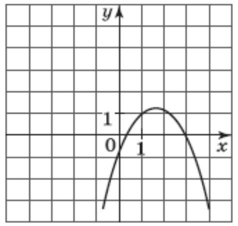


Рис. 13

Тематические тесты в составе УМК

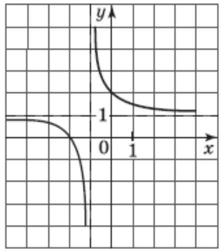
Тест 8. Функция $y = \dfrac{k}{x - x_0} + y_0$

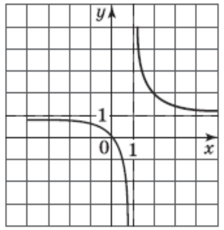
Вариант 1

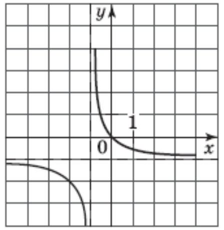
A1 В каких координатных четвертях расположен график функции $y = -\frac{3}{x}$?

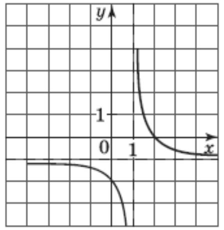
1) во II и IV четвертях 2) в I и II четвертях
3) в I и III четвертях 4) другой ответ

A2 Какой из приведённых графиков наиболее точно соответствует графику функции $y = \frac{1}{x+1} - 1$?

1)


2)


3)


4)


A3 Функция задана формулой $y = -\frac{1}{x-1} - 2$. Сколько положительных чисел среди чисел $y(0)$, $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-3)$?

1) ни одного 2) одно 3) два 4) три

A4 Дана функция $y = \frac{3x-2}{x-1}$. Из предложенных чисел выберите наибольшее.

1) $y(-2)$ 2) $y(-1)$ 3) $y(0)$ 4) $y(2)$

A5 Какая из данных окружностей не пересекает ось абсцисс?

1) $x^2 + y^2 = 1$ 2) $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 4$
3) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 4) $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 4$

A6 Найдите значение a, при котором прямая $ax + 2y = 2$ проходит через точку $(-1; 3)$.

1) 8 2) 6 3) 4 4) другой ответ

B1 Какое значение принимает функция $y = -\frac{6}{x+0{,}5} + 3$ при $x = 1$?

Ответ: ____________

B2 При каком значении x значение функции $y = \frac{12}{x+2} - 1$ равно 3?

Ответ: ____________

B3 Определите радиус окружности с центром в начале координат, проходящей через точку $(2; -4)$.

Ответ: ____________

B4 При каких значениях a окружность $(x - 1)^2 + (y + a)^2 = 5$ проходит через точку $(3; 1)$?

Ответ: ____________

B5 Определите наибольшее значение функции $y = \frac{3}{x-1} + 1$ на отрезке $[2; 4]$.

Ответ: ____________

B6 Прямая $ax + by = c$ проходит через точки $(-1; 1)$ и $(2; 4)$. Вычислите $-\frac{b}{a}$.

Ответ: ____________

Ответы

Тест 1. Функции и графики

Вариант 1

A1	A2	A3	A4	A5	A6
3	2	4	3	2	2
B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
−2	$(-\infty; 7)$	−2	20	$(-2; -5)$	55 км/ч

Вариант 2

A1	A2	A3	A4	A5	A6
4	4	4	2	4	3
B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
6	$(5; +\infty)$	−15	20	$(2; 3)$	60 км/ч

Вариант 3

A1	A2	A3	A4	A5	A6
4	3	1	1	2	4
B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
−6	$(-\infty; 7]$	3	10	$(0; -3)$	40 км/ч

Вариант 4

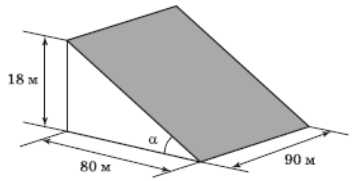
A1	A2	A3	A4	A5	A6
3	1	2	3	2	2
B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
1	$[3; +\infty)$	−10	15	$(4; 3)$	55 км/ч

15 новых вариантов от «Просвещения» к модели ОГЭ – 2020 года

ВАРИАНТ 2

ЧАСТЬ 1

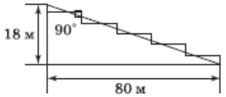
1 Земледелец владеет несколькими участками, один из которых расположен на склоне холма. Ширина участка 90 м, а верхняя точка находится на высоте 18 м от подножия.



Земледелец на участке, расположенном на склоне холма, выращивает чай. Какова площадь участка? Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: ____________.

2 Земледелец на своём участке решил устроить террасы — горизонтальные площадки в виде широких ступеней (см. рис. справа), чтобы вместо чая выращивать капусту, морковь или картофель. Строительство террас возможно, если уклон не больше 60 % (уклон находится как тангенс угла склона α, умноженный на 100 %). Удовлетворяет ли склон холма этим требованиям? Сколько процентов составляет уклон? Ответ округлите до десятых.



Ответ: ____________.

3 На сколько процентов сократилась посевная площадь после того, как земледелец устроил террасы? Ответ округлите до десятых.

Ответ: ____________.

4 Земледелец получает 8 кг белокочанной капусты с одного квадратного метра засеянной площади. Для заготовки капусты с кочанов снимаются внешние листья и выпиливаются кочерыжки, при этом теряется 22 % массы. Сколько килограммов заготовленной капусты получит земледелец со всех террас своего участка?

Ответ: ____________.

5 В таблице дана урожайность овощей, которые может засеять земледелец на террасах своего участка. За год обычно собирают два урожая — летом и осенью. По данным таблицы посчитайте наибольшее количество килограммов урожая, которое может собрать земледелец с участка за один год, если он может засевать разные овощи.

	Капуста	Морковь	Картофель
1-й урожай (июнь)	4,5 г/м^2	5 кг/м^2	Не выращивают
2-й урожай (сентябрь)	8 кг/м^2	7 кг/м^2	1,8 кг/м^2

Ответ: ____________.

6 Найдите значение выражения $6{,}9 - 11 \cdot (-6{,}2)$.

Ответ: ____________.

7 Какое из данных чисел принадлежит промежутку $[7; 8]$?

1) $\sqrt{7{,}5}$ 2) $\sqrt{8}$ 3) $\sqrt{44}$ 4) $\sqrt{63}$

Ответ: ____________.

8 Найдите значение выражения $\frac{(17^2)^{-9}}{17^{-20}}$.

Ответ: ____________.

9 Решите уравнение $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

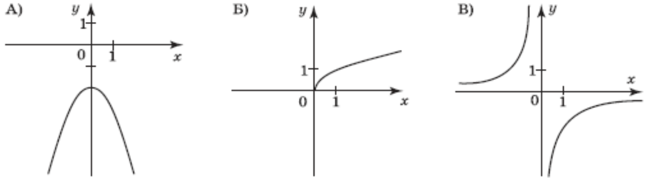
Ответ: ____________.

10 В магазине «Всё для праздника» в коробке лежат 100 шариков: 37 красных, 8 зелёных, 17 фиолетовых, остальные жёлтые и розовые, их поровну. Найдите вероятность того, что случайно выбранный из этой коробки шарик будет красным или жёлтым.

Ответ: ____________.

11 Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



15 новых вариантов от «Просвещения» к модели ОГЭ – 2020 года

ФОРМУЛЫ

1) $y = \sqrt{x}$ 2) $y = -\frac{2}{x}$ 3) $y = -x^2 - 2$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В

12 Дана арифметическая прогрессия (a_n), в которой $a_3 = 8{,}3$, $a_{16} = 40{,}8$. Найдите разность прогрессии.

Ответ: ____________.

13 Найдите значение выражения $\frac{a^2 - 16b^2}{16ab} : \left(\frac{1}{4b} - \frac{1}{a}\right)$ при $a = 3\frac{3}{11}$, $b = 4\frac{2}{11}$.

Ответ: ____________.

14 Энергия заряженного конденсатора W (в джоулях) вычисляется по формуле $W = \frac{CU^2}{2}$, где C — ёмкость конденсатора (в Ф), а U — разность потенциалов на обкладках конденсатора (в В). С помощью этой формулы найдите энергию конденсатора (в джоулях) ёмкостью 10^{-4} Ф, если разность потенциалов на обкладках конденсатора равна 22 В.

Ответ: ____________.

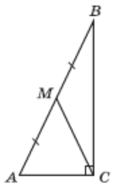
15 Укажите решение системы неравенств

$$\begin{cases} -2 + x > 0, \\ 7 - 2x > -5. \end{cases}$$

1) нет решений 2) $(2; +\infty)$ 3) $(-\infty; 6)$ 4) $(2; 6)$

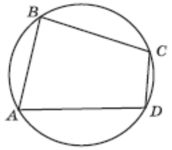
Ответ: ____________.

16 В треугольнике ABC угол C прямой, M — середина стороны AB, $AB = 12$, $BC = 11$. Найдите CM.



Ответ: ____________.

17 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, $\angle BAD = 42°$. Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

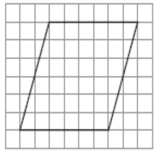


Ответ: ____________.

18 Острый угол прямоугольной трапеции равен 49°. Найдите наибольший угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ____________.

19 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён параллелограмм. Найдите площадь этого параллелограмма.



Ответ: ____________.

20 Какое из следующих утверждений верно?
1) Диагонали любого прямоугольника делят его на четыре подобных треугольника.
2) Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению гипотенузы к катету, прилежащему к этому углу.
3) Длина средней линии трапеции равна полусумме длин её оснований.
В ответе запишите номер выбранного утверждения.

Ответ: ____________.

ЧАСТЬ 2

21 Решите уравнение $x(4x^2 + 4x + 1) = -\frac{1}{8}(2x + 1)$.

Ответ: ____________.

22 Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одной и той же точки круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя час, когда одному из них оставался 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 15 мин назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 6 км/ч меньше скорости второго.

Ответ: ____________.

23 Постройте график функции $y = x^2 + 2x - 6|x - 1| - 3$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: ____________.

24 Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 4 и 6 соответственно. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.

Ответ: ____________.

25 Биссектрисы углов A и D выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, лежащей на стороне BC. Докажите, что точка E равноудалена от прямых AB, AD и CD.

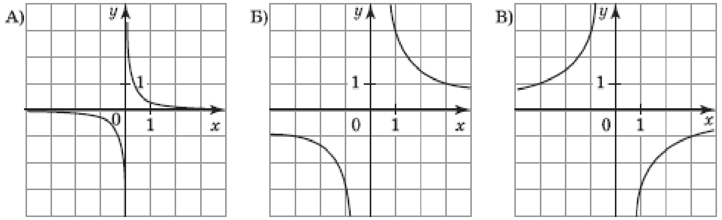
26 Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 17$, а углы C и D четырёхугольника $ABCD$ равны соответственно 147° и 87°.

Ответ: ____________.

11 На рисунках изображены графики функций вида $y = \frac{k}{x}$.

Установите соответствие между графиками функций и значениями коэффициента k.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $0 < k < 1$ 2) $k > 1$ 3) $k < 0$

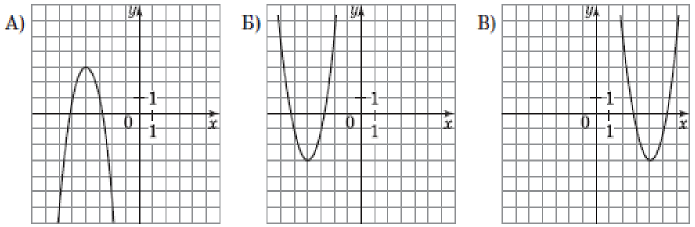
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В

11 Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = -2x^2 - 16x - 29$

2) $y = 2x^2 - 16x + 29$

3) $y = 2x^2 + 16x + 29$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

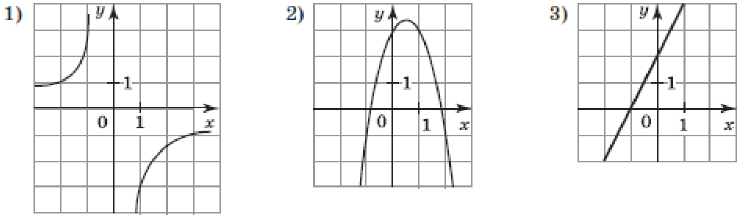
А	Б	В

11 Установите соответствие между функциями и их графиками.

ФУНКЦИИ

А) $y = \frac{5}{3}x + 2$ Б) $y = -2x^2 + 2x + 3$ В) $y = -\frac{3}{x}$

ГРАФИКИ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

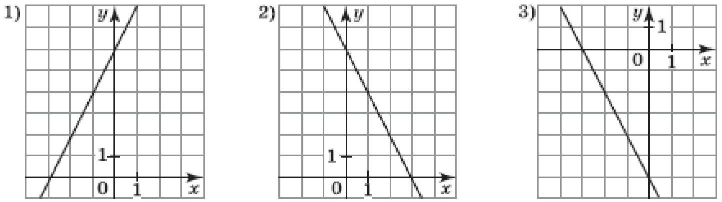
А	Б	В

11 Установите соответствие между функциями и их графиками.

ФУНКЦИИ

А) $y = 2x + 6$ Б) $y = -2x - 6$ В) $y = -2x + 6$

ГРАФИКИ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В

15 новых вариантов от «Просвещения» к модели ОГЭ – 2020 года

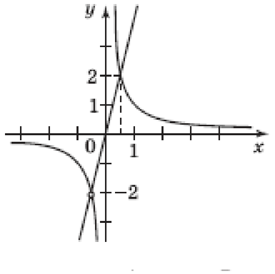
15 новых вариантов от «Просвещения» к модели ОГЭ – 2020 года

23 Постройте график функции $y = \dfrac{2x-4}{x^2-2x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

Ответ: ______________________.

23 Постройте график функции $y = \dfrac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: ______________________.



23 Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2+3x+2)(x^2-4x+3)}{x^2+x-2}$ и определите, при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: ______________________.

23 Постройте график функции $y = x^2 + 2x - 6|x-1| - 3$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: ______________________.

23 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{при } x \geqslant -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при } x < -2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: ______________________.

23 Постройте график функции

$$y = \frac{x^3 + 3x^2}{|x|} - 5x.$$

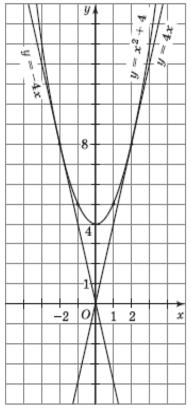
Определите, при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: ______________________.

Пособие из серии «Трудные задания ОГЭ»
Крайнева Л.Б. «Задания повышенного и высокого уровней сложности. Приёмы и способы решений»

ЗАДАЧА 23

ПРИМЕР 1. Найдите все значения k, при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = x^2+4$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.



РЕШЕНИЕ. Условие задачи означает, что система уравнений $\begin{cases} y = kx, \\ y = x^2+4 \end{cases}$ имеет единственное решение. Значит, уравнение $x^2+4 = kx$ имеет единственное решение. Найдём все значения k, при которых это выполняется.

$x^2-kx+4=0,$

$D=k^2-16.$

Квадратное уравнение имеет единственное решение, если его дискриминант равен нулю:

$k^2-16=0,$

$k=\pm4.$

Следовательно, прямые $y=4x$ и $y=-4x$ имеют с параболой $y=x^2+4$ ровно одну общую точку. Построим графики этих функций. Парабола $y=x^2+4$ получается из параболы $y=x^2$ сдвигом вдоль оси Oy на 4 единицы вверх. Прямые $y=4x$ и $y=-4x$ проходят через начало координат и соответственно точки (1; 4) и (–1; 4). Общие точки этих прямых с параболой (2; 8) и (–2; 8) соответственно (см. рисунок).

ОТВЕТ: –4; 4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Построим график функции $y=x^2+4$ другим способом.
Графиком функции $y=x^2+4$ является парабола, ветви которой направлены вверх ($a=1$, $a>0$). Найдём координаты m и n вершины этой параболы:

$m=-\frac{b}{2a}=-\frac{0}{2\cdot1}=0,$

$n=y(0)=4.$

Значит, вершина параболы — точка (0; 4).
Составим таблицу некоторых значений функции.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	13	8	5	4	5	8	13

Построив точки и соединив их плавной линией, получим график функции $y=x^2+4$.
Прямые $y=4x$ и $y=-4x$ построим по двум точкам, принадлежащим этим прямым, координаты которых запишем в соответствующих таблицах.

$y=4x$

x	0	1
y	0	4

$y=-4x$

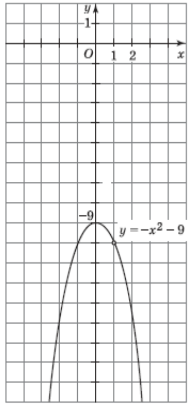
x	0	1
y	0	–4

ПРИМЕР 2. Постройте график функции $y=\frac{(x^2+9)(x-1)}{1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем выражение

$\frac{(x^2+9)(x-1)}{1-x}=-x^2-9$

при условии $x\neq1$.



Значит, графиком функции $y=\frac{(x^2+9)(x-1)}{1-x}$ является парабола с выколотой точкой (1; –10), получаемая из параболы $y=-x^2$ сдвигом вдоль оси Oy на 9 единиц вниз (см. рисунок).
Прямая $y=kx$ имеет с построенным графиком ровно одну общую точку, если уравнение $-x^2-9=kx$ имеет один корень или имеет два корня, один из которых равен 1.

$x^2+kx+9=0,$

$D=k^2-36.$

1) $D=0,$

$k^2-36=0,$

$k=\pm6.$

Прямые $y=-6x$ и $y=6x$ имеют с построенным графиком одну общую точку.

2) $D>0$, $|k|>6$.

Если $x_1=1$, то $1+k+9=0$, откуда $k=-10$, $|-10|>6$.
Тогда уравнение $x^2-10x+9=0$ имеет 2 корня: $x_1=1$ и $x_2=9$, и прямая $y=-10x$ пересекает график функции в единственной точке (9; –90).

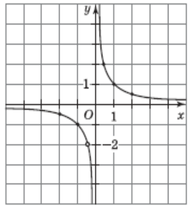
ОТВЕТ: –10; –6; 6.

ПРИМЕР 3. Постройте график функции $y=\frac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем выражение

$\frac{2x+1}{2x^2+x}=\frac{2x+1}{x(2x+1)}=\frac{1}{x}$

при условии, что $2x+1\neq0$, т. е. $x\neq-\frac{1}{2}$.



Значит, графиком данной функции является гипербола $y=\frac{1}{x}$ с выколотой точкой $\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$ (см. рисунок).

Прямая $y=kx$ имеет с построенным графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку $\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$.

В этом случае $k=\frac{y}{x}=4$.

ОТВЕТ: 4.

Крайнева Л.Б. «Задания повышенного и высокого уровней сложности. Приёмы и способы решений»

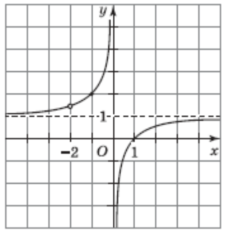
ПРИМЕР 4. Постройте график функции

$$y = 1 - \frac{x+2}{x^2+2x}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем выражение $1 - \frac{x+2}{x^2+2x} = 1 - \frac{x+2}{x(x+2)} = 1 - \frac{1}{x}$ при условии, что $x \neq -2$.

Графиком функции $y = 1 - \frac{x+2}{x^2+2x}$ является гипербола с выколотой точкой ($x \neq -2$), которая получается из гиперболы $y = -\frac{1}{x}$ с помощью сдвига вдоль оси Oy на 1 единицу вверх (см. рисунок). Таблица некоторых значений функции:



x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3
y	1,5	2	3	-1	0	$\frac{1}{2}$

выколотая точка

Прямая $y = m$ параллельна оси Ox или совпадает с ней и проходит через точку $(0; m)$. Эта прямая не имеет с построенным графиком ни одной общей точки при $m = 1$ и $m = 1{,}5$ (проходит через выколотую точку $(-2; 1{,}5)$).

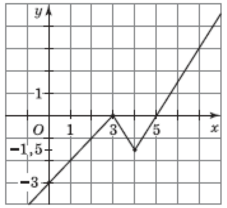
ОТВЕТ: 1; 1,5.

ПРИМЕР 5. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x - 3, \text{ если } x < 3, \\ -1{,}5x + 4{,}5, \text{ если } 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ 1{,}5x - 7{,}5, \text{ если } x > 4, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

РЕШЕНИЕ. Построим график функции (см. рисунок):
при $x < 3$ $y = x - 3$ — луч с началом в точке $(3; 0)$, проходящий через точку $(0; -3)$;
при $3 \leqslant x \leqslant 4$ $y = -1{,}5x + 4{,}5$ — отрезок с концами в точках $(3; 0)$ и $(4; -1{,}5)$;
при $x > 4$ $y = 1{,}5x - 7{,}5$ — луч с началом в точке $(4; -1{,}5)$, проходящий через точку $(5; 0)$.
Прямая $y = m$ имеет с построенным графиком ровно две общие точки, если она проходит через вершины ломаной $(3; 0)$ и $(4; -1{,}5)$, т. е. при $m = -1{,}5$ и $m = 0$.



ОТВЕТ: $-1{,}5$; 0.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите все значения k, при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = -x^2 - 1$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

2. Постройте график функции $y = \frac{(x^2+1)(x+2)}{-2-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

3. Постройте график функции $y = \frac{6x+7}{6x^2+7x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

4. Постройте график функции $y = 1 - \frac{x+5}{x^2+5x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

5. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 2{,}5x - 1, \text{ если } x < 1, \\ -2{,}5x + 4, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 1{,}5x - 8, \text{ если } x > 3, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

6. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, \text{ если } x \geqslant -1, \\ -\frac{4}{x}, \text{ если } x < -1, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

7. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 10x + 27, \text{ если } x \geqslant 4, \\ x - 1, \text{ если } x < 4, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

8. Постройте график функции $y = |x^2 - 6x + 5|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

9. Постройте график функции $y = x^2 - 3|x| - x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком не менее одной, но не более трёх общих точек.

10. Постройте график функции $y = x^2 - |6x + 5|$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

11. Постройте график функции $y = |x|(x + 2) - 3x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

12. Постройте график функции $y = x|x| + |x| - 3x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

13. Постройте график функции $y = \frac{(0{,}5x^2 + 2x)|x|}{x+4}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

14. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right| + \frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

15. Постройте график функции $y = 5 - \frac{x^4 - 2x^3}{x^2 - 2x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

16. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 7x + 12)(x^2 - x - 2)}{x^2 + 5x + 4}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

17. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 - 4xy + 4y^2 = 1$.

18. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x^2 - 2y)(x^2 - 1) = 0$.

19. Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2 + y^2 - 9}{x^2 - y^2} = 0$.

20. При каких значениях p прямая $y = px + 2$ образует с осями координат треугольник, площадь которого равна 16?

21. При каких значениях c окружность $x^2 + y^2 = 18$ и прямая $x - y = c$ не пересекаются?

Сайт официального интернет-магазина издательства https://shop.prosv.ru

Промокод **vebinar** даёт скидку 5% на неограниченное число покупок в интернет-магазине shop.prosv.ru до 31 декабря 2020 г. Скидка 7% по промокоду **Prosvet** действует до 30.09.2020.