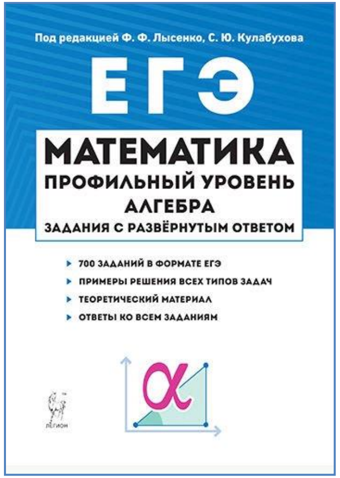
Социально-экономическая задача №17
на профильном ЕГЭ по математике
как пример практико-ориентированного задания

Презентация подготовлена на основе этих книг



Промокодом для скидки 30%
поделимся в конце вебинара☺

Спецификация КИМ ЕГЭ-2021 по математике (фрагмент)

17	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1, 6.3	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	П	3	–	35

Кредиты (задачи ЕГЭ-2020)

17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 96 500 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Решение.
S — сумма кредита (в рублях), x — годовой платёж (в рублях).
Общая сумма выплат $3x$.

$$3x - S = 96\,500$$

Год	Долг в начале года (в руб.)	Долг после начисления процентов (в руб.)	Долг после внесения суммы (в руб.)
1	S	$1{,}2S$	$1{,}2S-x$
2	$1{,}2S-x$	$1{,}2\cdot(1{,}2S-x)$	$1{,}2\cdot(1{,}2S-x)-x=$ $=1{,}2^2S-2{,}2x$
3	$1{,}2^2S-2{,}2x$	$1{,}2\cdot(1{,}2^2S-2{,}2x)$	$1{,}2\cdot(1{,}2^2S-2{,}2x)-x=$ $=1{,}2^3S-3{,}64x\ \underline{\underline{=\mathbf{0}}}$

$$\begin{cases}3x-S=96\,500\\ 1{,}2^3S-3{,}64x=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}3x-S=96\,500\\ 1{,}2^3S-3{,}64\cdot\dfrac{S+96\,500}{3}=0\end{cases}$$

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3S-3{,}64\cdot\frac{S+96\,500}{3}=0\qquad \frac{216}{125}S-3{,}64\cdot\frac{S+96\,500}{3}=0$$

$$648S=455S+96\,500\cdot455\qquad 193S=96\,500\cdot455\qquad S=227\,500$$

Общая сумма выплат
$3x=S+96\,500=227\,500+96\,500=324\,000$ (рублей).

Ответ: 324 000 рублей.

Критерии

Содержание критерия, задание 17	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Подробнее:

1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию, и т .п. Предъявленный текст должен включать и описание того, как построена модель, и направление, «продолжаемое» до верного решения.

Оценка в **2 балла**, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи. Здесь предполагается завершенное, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или пробелы в описании составления модели.

«МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОЦЕНИВАНИЮ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ»

17 В августе 2021-го года планируется взять кредит на 5 лет в размере 210 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июль каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в августе 2022, 2023 и 2024-го года долг остаётся равным 210 тыс. рублей;
— выплаты в 2025 и 2026-м году равны;
— к августу 2026-го года долг должен быть погашен полностью.
Найдите r, если известно, что общий размер выплат по погашению долга составит 305 тыс. рублей.

Решение

Пусть x тыс. рублей — платёж в 2025 году, $p = 1 + \frac{r}{100}$.

Год	Январь	Август	Платёж
2022	$210p$	210	$210(p-1)$
2023	$210p$	210	$210(p-1)$
2024	$210p$	210	$210(p-1)$
2025	$210p$	$210p-x$	x
2026	$(210p-x)p$	$(210p-x)p-x$	x

Так как $(210p-x)p-x=0$, то $x = \dfrac{210p^2}{p+1}$.

Суммарный размер всех выплат по погашению кредита равен $3\cdot 210(p-1)+2x$.

Согласно условию получаем уравнение:

$$630(p-1)+\frac{420p^2}{p+1}=305,$$

Согласно условию получаем уравнение:

$$630(p-1)+\frac{420p^2}{p+1}=305,$$

$$630p^2-630+420p^2-305p-305=0,$$

$$1050p^2-305p-935=0,$$

$$210p^2-61p-187=0.$$

$$p_{1,2}=\frac{61\pm\sqrt{61^2+4\cdot 210\cdot 187}}{420}=\frac{61\pm 401}{420}.$$

$$p=\frac{462}{420}=1{,}1.$$

Отсюда следует, что $r=10$.

Ответ: 10.

17 В июле 2021-го года планируется взять кредит в банке на сумму 2,5 млн рублей. Известно, что банк каждый год увеличивает сумму долга на r процентов, после чего происходит платёж. Кредит был полностью погашен за 2 года. Найдите r, если первый платёж составил 1,5 млн рублей, а второй — 1,8 млн рублей.

Решение Пусть $p = 1 + \frac{r}{100}$.

Тогда после первого платежа долг составил $(2{,}5p - 1{,}5)$ млн рублей, а после второго платежа долг равен $(p(2{,}5p - 1{,}5) - 1{,}8)$ млн рублей.

Получим уравнение $p(2{,}5p - 1{,}5) - 1{,}8 = 0$.

$2{,}5p^2 - 1{,}5p - 1{,}8 = 0;$

$25p^2 - 15p - 18 = 0;$

$$p_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 + 4 \cdot 25 \cdot 18}}{50} = \frac{15 \pm \sqrt{3^2 \cdot 5^2 (1 + 4 \cdot 2)}}{50} = \frac{15 \pm 3 \cdot 5 \cdot 3}{50} = \frac{15 \pm 45}{20}.$$

Так как $p > 0$, то $p = \frac{15 + 45}{50} = \frac{6}{5}$. Тогда $1 + \frac{r}{100} = \frac{6}{5}$; $\frac{r}{100} = \frac{1}{5}$; $r = 20$.

Ответ: 20.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5,5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 11 млн рублей?

Решение

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$5{,}5;\ \frac{5{,}5(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{5{,}5\cdot 2}{n};\ \frac{5{,}5}{n};\ 0.$$

$$5{,}5;\ \frac{5{,}5(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{5{,}5\cdot 2}{n};\ \frac{5{,}5}{n};\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 25%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$6{,}875;\ \frac{6{,}875(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{6{,}875\cdot 2}{n};\ \frac{6{,}875}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1{,}375+\frac{5{,}5}{n};\ \frac{1{,}375(n-1)+5{,}5}{n};\ \ldots;\ \frac{1{,}375\cdot 2+5{,}5}{n};\ \frac{1{,}375+5{,}5}{n}.$$

Всего следует выплатить

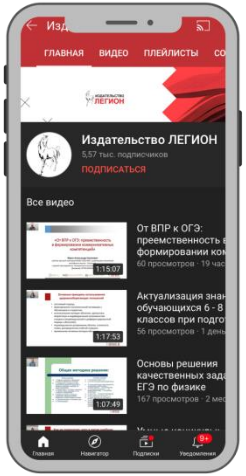
$$5{,}5+1{,}375\cdot\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\cdots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=5{,}5+1{,}375\cdot\frac{n+1}{2}\ (\text{млн рублей}).$$

Общая сумма выплат равна 11 млн рублей, поэтому

$$5{,}5+1{,}375\cdot\frac{n+1}{2}=11,\ \ \frac{n+1}{2}=\frac{11}{2}\cdot\frac{8}{11},$$

$$n+1=8,\ \ n=7.$$

Ответ: 7.



ВИДЕОУРОКИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ
на канале издательства «Легион»
www.youtube.com

Кредиты (задача ЕГЭ 2019)

17 В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}3S$	0

Найдите наименьшее S, при котором каждая из выплат будет больше 3 млн рублей.

Решение №1

Найдём все выплаты в соответствии с условием задачи. Для этого заполним следующую таблицу.

Год	Январь	Июль	Выплаты
2020	$1{,}3S$	$0{,}7S$	$1{,}3S - 0{,}7S = 0{,}6S$
2021	$1{,}3 \cdot 0{,}7S$	$0{,}3S$	$1{,}3 \cdot 0{,}7S - 0{,}3S = 0{,}61S$
2022	$1{,}3 \cdot 0{,}3S$	0	$1{,}3 \cdot 0{,}3S = 0{,}39S$

По условию каждая из выплат должна быть больше 3 млн рублей:

$$\begin{cases} 0{,}6S > 3 \\ 0{,}61S > 3 \\ 0{,}39S > 3 \end{cases}$$

Необходимо найти наименьшее целое число S, удовлетворяющее неравенству $0{,}39S > 3$

$$S > \frac{3}{0{,}39} = \frac{300}{39} = \frac{100}{13} = 7\frac{9}{13}$$

Наименьшее целое число S, удовлетворяющее последнему неравенству равно 8.

Ответ: 8.

Решение №2

1) Чтобы каждая выплата была больше 3 млн. рублей достаточно, чтобы этому условию удовлетворяла наименьшая из всех выплат.

2) Каждая выплата состоит из двух частей:
а) проценты на оставшуюся часть долга;
б) часть основного долга на которую он уменьшается в соответствии с данной таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}3S$	0

Понятно, что последняя выплата будет самой маленькой, так как у неё самая маленькая часть а) и одна из самых маленьких часть б) выплаты.

3) Последняя выплата равна $\underbrace{0{,}3\cdot 0{,}3S}_{\text{часть а)}} + \underbrace{0{,}3S}_{\text{часть б)}} = 0{,}39S.$

Необходимо найти наименьшее целое число S, удовлетворяющее неравенству $0{,}39S > 3$.

$$S > \frac{3}{0{,}39} = \frac{300}{39} = \frac{100}{13} = 7\frac{9}{13}$$

Ответ: 8.

Вклады

17 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

Решение

Пусть x — размер первоначального вклада в млн рублей.

Год	Вклад	
	в начале года	в конце года
1	x	$1{,}1x$
2	$1{,}1x$	$1{,}1^2x$
3	$1{,}1^2x+3$	$1{,}1(1{,}1^2x+3)=1{,}1^3x+3{,}3$
4	$1{,}1^3x+3{,}3+3=1{,}1^3x+6{,}3$	$1{,}1(1{,}1^3x+6{,}3)=1{,}1^4x+6{,}93$

Необходимо найти наибольшее целое решение неравенства:

$$1{,}1^4x+6{,}93<25$$

$$x<\frac{25-6{,}93}{1{,}1^4}=\frac{18{,}07}{1{,}4641}\approx 12{,}3$$

Наибольшее целое решение этого неравенства $x=12$.

Ответ: 12 млн рублей.

17 Банк предлагает два вида вкладов, «Стабильный» и «Прогрессивный». Вклад «Стабильный» имеет процентную ставку 10% годовых. Вклад «Прогрессивный» — 6% за первый год и p%, начиная со второго года. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Найдите наименьшее целое p, при котором трёхлетний вклад «Прогрессивный» окажется выгоднее, чем «Стабильный».

Решение

Пусть на каждый из этих вкладов было положено по S рублей.

Вклад «Стабильный».

Год	Сумма на начало года (в рублях)	Сумма на конец года (в рублях)
1	S	$1{,}1S$
2	$1{,}1S$	$(1{,}1)^2S$
3	$(1{,}1)^2S$	$(1{,}1)^3S$

$$(1+p/100)^2\cdot 1{,}06\cdot S>(1{,}1)^3S;$$

Вклад «Прогрессивный».

Год	Сумма на начало года (в рублях)	Сумма на конец года (в рублях)
1	S	$\left(1+\frac{6}{100}\right)S$
2	$\left(1+\frac{6}{100}\right)S$	$\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{6}{100}\right)S$
3	$\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{6}{100}\right)S$	$\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\left(1+\frac{6}{100}\right)S$

$$(1+p/100)^2\cdot 1{,}06\cdot S>(1{,}1)^3S;\quad (1+p/100)^2>\frac{(1{,}1)^3}{1{,}06};\quad \left(\frac{100+p}{100}\right)^2>\frac{1{,}331}{1{,}06};$$

$$(100+p)^2>\frac{1{,}331\cdot 100^2}{1{,}06}=\frac{1\,331\,000}{106}=12\,556{,}6\ldots;\qquad 100+p>\sqrt{12\,556{,}6\ldots}$$

Вычислим два последовательных квадрата целых чисел, между которыми лежит число $12\,556{,}6\ldots$:

$$110^2=12\,100,\ 111^2=12\,321,\ 112^2=12\,554,\ 113^2=12\,769,$$

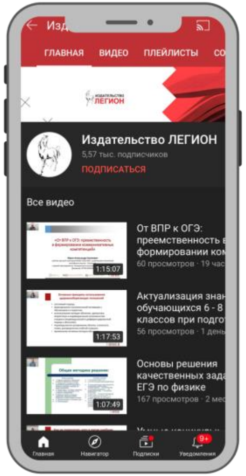
значит $112^2<12\,556{,}6\ldots<113^2$. Отсюда $112<\sqrt{12\,556{,}6\ldots}<113$.

Так как $(100+p)$ целое число, то $100+p\geqslant 113$, $p\geqslant 13$.

Значит, нам подходит любое $p\geqslant 13$,

а наименьшее подходящее p равно 13.

Ответ: 13.



ВИДЕОУРОКИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ
на канале издательства «Легион»
www.youtube.com

Свойства функций и экстремальные значения

17. Егор Сергеевич владеет двумя фабриками, выпускающими одинаковую продукцию при использовании одних и тех же технологий, но расположенными в разных городах. Если рабочие одной из фабрик суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то они выпускают $4t$ единиц продукции. За каждый час работы рабочему в первом городе Егор Сергеевич платит 300 рублей, а во втором городе — 500 рублей. Егор Сергеевич в сумме готов выделять 1 200 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее число единиц продукции можно выпустить при этих условиях?

Решение

Составим таблицу по условию задачи.

Фабрика	Время (часы работы)	Количество единиц продукции	Оплата (руб.) (в тысячах рублей)
Первая	x^2	$4x$	$300x^2$
Вторая	y^2	$4y$	$500y^2$

Фабрика	Время (часы работы)	Количество единиц продукции	Оплата (руб.) (в тысячах рублей)
Первая	x^2	$4x$	$300x^2$
Вторая	y^2	$4y$	$500y^2$

Чтобы выпустить больше продукции, надо использовать всю сумму, которая выделяется на оплату труда. Отсюда $300x^2 + 500y^2 = 1\,200\,000$;
$3x^2 + 5y^2 = 12\,000$; $y^2 = \dfrac{12\,000 - 3x^2}{5}$; $y = \sqrt{\dfrac{12\,000 - 3x^2}{5}}$.

Количество произведённой продукции равно
$4x + 4y = 4x + 4\sqrt{\dfrac{12\,000 - 3x^2}{5}}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = 4x + 4\sqrt{\dfrac{12\,000 - 3x^2}{5}}$ и найдём её наибольшее значение.

$$f'(x) = 4 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{3}{5} \cdot 2x}{\sqrt{\frac{12\,000 - 3x^2}{5}}} = 4\left(1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{\sqrt{\frac{12\,000 - 3x^2}{5}}}\right).$$

Найдём точки экстремума:

$f'(x) = 0.$

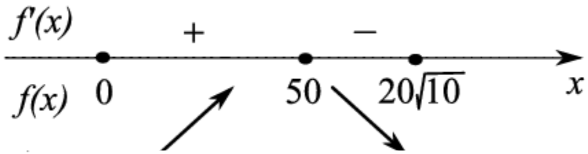
$$4\left(1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{\sqrt{\dfrac{12\,000 - 3x^2}{5}}}\right) = 0;$$

$$\sqrt{\frac{12\,000 - 3x^2}{5}} = \frac{3x}{5};$$

$$\frac{12\,000 - 3x^2}{5} = \frac{9x^2}{25};$$

$24x^2 = 60\,000;\ x^2 = 2500;\ x = 50.$

Ясно, что $f'(x) > 0$ при $0 < x < 50$ и $f'(x) < 0$ при $x > 50$ (на области определения функции: $\dfrac{12\,000 - 3x^2}{5} \geqslant 0;\ x \leqslant 20\sqrt{10}$).



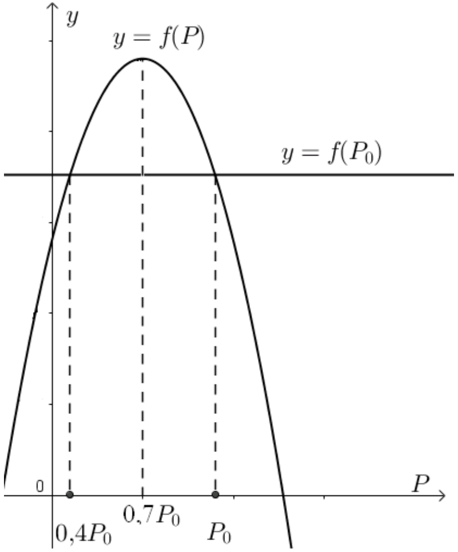
$$y = \sqrt{\frac{12\,000 - 3x^2}{5}} = 30;$$

Наибольшее количество деталей равно $4x + 4y = 320$.

Ответ: 320.

17 Зависимость объема Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 12000 - P$, $2000 \leqslant P \leqslant 12000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $2500Q + 1\,000\,000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 60%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение

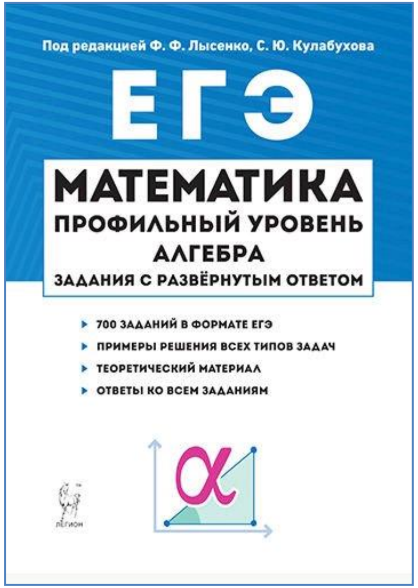


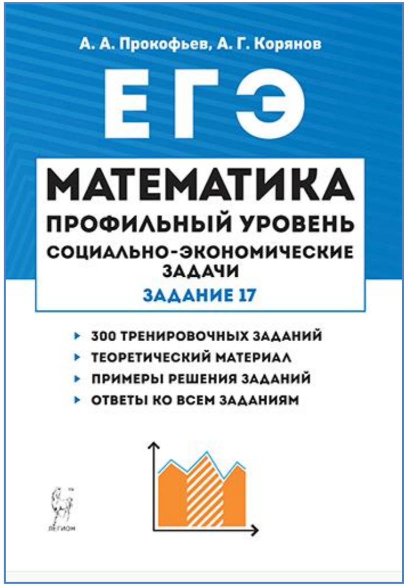
Прибыль: $f(P) = PQ - (2500Q + 1000000) = -P^2 + 14500P - 31000000$.

Пусть первоначальная цена равнялась P_0. После снижения на 60% цена стала равняться $0{,}4P_0$. Графиком функции $y = f(P)$ является парабола с ветвями, направленными вниз, поэтому наибольшее значение прибыль будет достигать в вершине параболы. Так как $f(P_0) = f(0{,}4P_0)$, то вершина параболы будет находиться в точке $\dfrac{P_0 + 0{,}4P_0}{2} = 0{,}7P_0$. Это означает, что нужно увеличить цену товара с $0{,}4P_0$ до $0{,}7P_0$, то есть на $\dfrac{0{,}7P_0 - 0{,}4P_0}{0{,}4P_0} \cdot 100\% = 75\%$.

Ответ: 75.

Учебные пособия





СКИДКА 30%

на все пособия по математике и информатике

действует до 15.09.2020

При заказе в интернет-магазине
www.legionr.ru ввести код купона:

математикаЛЕГИОН

ВИДЕОУРОКИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ
на канале издательства «Легион»
www.youtube.com