



# МАТЕМАТИКА В ФИЗИКЕ

Парфентьева Наталия Андреевна,  
кандидат физико-математических наук,  
профессор, автор учебников,  
пособий и задачников по физике,  
член-корреспондент МОИП



ПРОСВЕЩЕНИЕ

2020

	<b>МАТЕМАТИКА</b>	
<i>Алгебра</i>	<i>Тригонометрия</i>	<i>Геометрия</i>
Решение уравнений	Тригонометрические функции	Векторы
Неравенства	Тригонометрические преобразования	Планиметрия
Решение системы уравнений		Стереометрия

<b>Биология</b>	<b>Химия</b>	<b>География</b>
Физические методы исследования	Электричество – законы Фарадея	Гидро-аэродинамика
Физические величины в биологии	Молекулярная физика	Механика
Гидродинамика	Атомная физика – строение атома	Ядерная физика
Электричество		
Атомная физика		

**Физкультура, литература, история, ОБЖ.**

*«Пока законы математики остаются определенными, они не имеют ничего общего с реальностью, как только у них появляется что-то общее с реальностью, они становятся неопределенными».*

**А. Эйнштейн**

**По выражению Р. Милликена, Максвелл «облек плебейски обнаженные представления Фарадея в аристократические одежды математики».**

*«В каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней есть математики.»*

**И. Кант**

## Алгебра в физике.

В математике переменные  $x, y, z, t$ .

$$y = \frac{z}{x}$$

$$v = \frac{s}{t} \quad I = \frac{U}{R} \quad \frac{P}{T} = k (V = \text{const})$$

## Решение квадратного уравнения. Физический смысл решения.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

- 1) найти значение дискриминанта  $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ ,
- 2) при  $D > 0$  продолжить решение, при  $D < 0$  искать ошибку,
- 3) Записать решение в виде:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

**Задача 1.** Пешеход прошел весь путь в одном направлении со средней скоростью 6 км/ч. Первую треть пути он шел со скоростью  $v$ , а оставшийся путь со скоростью на 2 км/ч меньшей. Определите среднюю скорость на первом участке пути.

**Решение.**

$$v_{cp} = \frac{L}{t}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L}{3v_1} + \frac{2L}{3(v_1 - \Delta v)}$$

$$v_{cp} = \frac{3v_1(v_1 - \Delta v)}{2v_1 - \Delta v}$$

$$v_1^2 - 2v_1v_{cp} + \frac{1}{3}v_{cp}\Delta v = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{2v_1 \pm \sqrt{D}}{2} = 4 \pm 3,5 \text{ (км / ч)}.$$

**Задача 2.** Из окна, находящегося на высоте  $h = 3$  м, мальчик бросает мяч со скоростью  $v_0 = 5$  м/с под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. На каком расстоянии от дома упадет мяч?

**Решение.**  
 Движение мяча происходит в плоскости  $XOY$ .  
 Выберем оси координат, как указано на рисунке

$$\text{Ось } OX : x = v_x t$$

$$\text{Ось } OY : y_0 = h; a_y = -g$$

$$y = h + (v_0 \sin \alpha) t - \frac{gt^2}{2}$$

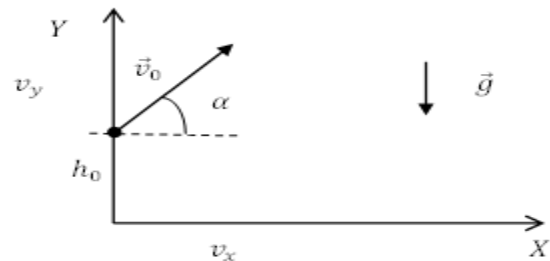
$$L = v_x t_{\text{пол}}$$

$$0 = h + v_0 \sin \alpha t_{\text{пол}} - \frac{gt_{\text{пол}}^2}{2}$$

$$\frac{gt_{\text{пол}}^2}{2} - v_0 \sin \alpha t_{\text{пол}} - h = 0$$

$$t_{\text{пол } 1,2} = \frac{v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gh}}{g} = 1,1 \text{ м}$$

$$L = v_0 \cos \alpha \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gh}}{g}$$



**Задача 3.** Мяч, брошенный вертикально вверх на высоте  $h = 24,5$  м побывал дважды с интервалом  $\Delta t = 3$  с. Определите начальную скорость мяча. **Решение.**

**Способ 1.**

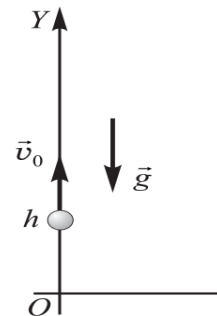
$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \rightarrow \frac{gt^2}{2} - v_0 t + h = 0$$

$$t_{\text{пол } 1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} - \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} = 2 \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

$$(g\Delta t)^2 = 4(v_0^2 - 2gh) \rightarrow v_0 = \pm \sqrt{2gh + \frac{(g\Delta t)^2}{4}}.$$





## Способ 2.

$$H = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$t_{cn} = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

$$\Delta t = 2t_{cn} = 2 \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

**Задача 4.** Источник тока, замкнутый на резистор, имеет ЭДС 10 В, внутреннее сопротивление 2 Ом. Полезная мощность при замыкании ключа равна 6,94 Вт. Определите сопротивление резистора.

**Решение. Способ 1.** Полезная мощность равна

$$N_{\text{полез}} = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + r)^2} R$$

$$(R + r)^2 + \frac{\mathcal{E}^2}{N_{\text{полез}}} R = 0$$

$$R^2 + R \left( \frac{\mathcal{E}^2}{N_{\text{полез}}} + 2r \right) + r^2 = 0$$

$$R = -\frac{\frac{\mathcal{E}^2}{N_{\text{полез}}} + 2r}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\frac{\mathcal{E}^2}{N_{\text{полез}}} + 2r}{2} \right)^2 - r^2}.$$

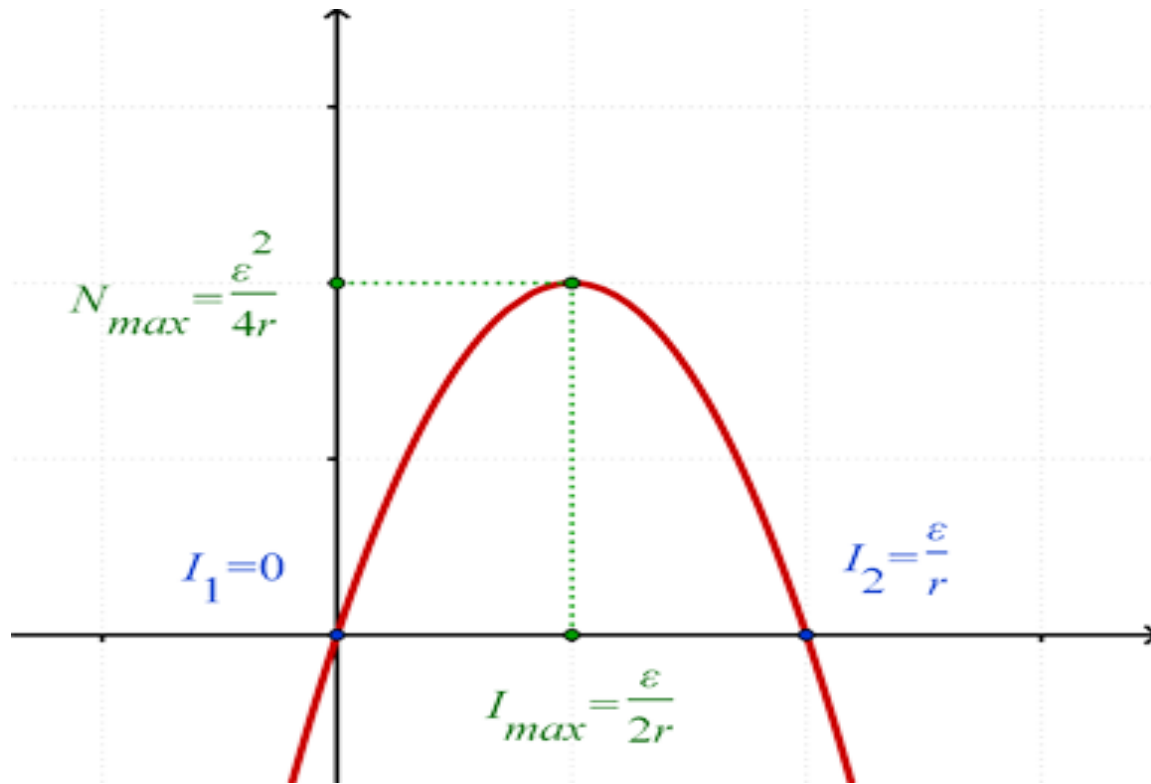
**Способ 2.** Полезная мощность равна

$$N_{\text{полез}} = I(\mathcal{E} - Ir)$$

$$I^2 r - I\mathcal{E} + N_{\text{полез}} = 0$$

$$I_{1,2} = -\frac{\mathcal{E} \pm \sqrt{D}}{2r}, \quad D = \mathcal{E}^2 - 4N_{\text{полез}}r$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \rightarrow R_{1,2} = \frac{\mathcal{E}}{I_{1,2}} - r.$$



Два корня уравнения, имеющие физический смысл.

**Задача 5.** В пробирке длиной  $l = 10$  см, расположенной вертикально, над воздухом находится столбик ртути высотой  $h = 3$  см. Пробирку переворачивают вверх дном. Определите, какой высоты столбик ртути останется в пробирке. Принять  $p_{\text{атм}} = 1,013 \cdot 10^5$  Па, плотность ртути  $\rho = 13,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

**Решение.**

Положение 1  $V_1 = (l - h)S$

$$\vec{F}_{\text{д1}} + \vec{F}_{\text{д2}} + m\vec{g} = 0$$

$$p_1 S - mg - p_{\text{атм}} S = 0 \rightarrow p_1 = p_{\text{атм}} + \rho gh$$

Положение 2  $V_2 = (l - x)S$

$$\vec{F}'_{\text{д1}} + \vec{F}'_{\text{д2}} + m_x \vec{g} = 0 \rightarrow p_2 = p_{\text{атм}} - \rho gx$$

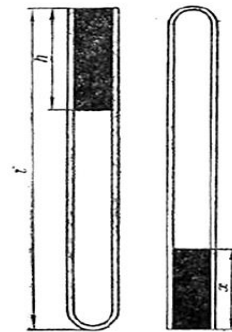
$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \rightarrow (p_{\text{атм}} + \rho gh)(l - h) = (p_{\text{атм}} - \rho gx)(l - x)$$

$$\rho gl + p_{\text{атм}} = A, \quad p_{\text{атм}} l - (p_{\text{атм}} + \rho gh)(l - h) = B$$

$$x_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4\rho g B}}{2\rho g}$$

$$x = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4\rho g B}}{2\rho g} = 0,026 \text{ м}$$

$$(h_0 + h)(l - h) = (h_0 - x)(l - x).$$



**Задача 6.** Расстояние между предметом и изображением, полученным с помощью собирающей линзы, равно 36 см. Фокусное расстояние линзы 5 см. Определите, на каком расстоянии от линзы находятся предмет и его изображение.

**Решение.**

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

$$d + f = l \rightarrow d = l - f$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{l - f} + \frac{1}{f} = \frac{l}{(l - f) f}$$

$$lf - f^2 = lF$$

$$f^2 - lf + lF = 0$$

$$f_{1,2} = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - lF} = 18 \pm \sqrt{324 - 180} \text{ (см)} = 18 \pm 12 \text{ (см)}$$

$$d_1 = 6 \text{ см}, f_1 = 30 \text{ см}; d_2 = 30 \text{ см}, f_2 = 6 \text{ см}.$$

# Система алгебраических уравнений

## Способы подстановки и сложения

Способ подстановки

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$y = \frac{c_2 - a_2x}{b_2} = \frac{c_2}{b_2} - \frac{a_2}{b_2}x$$

$$a_1x - \frac{b_1a_2}{b_2}x = c_1 - \frac{c_2}{b_2}b_1 \rightarrow x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

$$y = \frac{c_2}{b_2} - \frac{a_2}{b_2} \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - b_1a_2} = \frac{a_1b_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}.$$

## Способ сложения

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \times -b_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 & \times b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1b_2x - b_1b_2y = -b_2c_1 \\ a_2b_1x + b_2b_1y = c_2b_1 \end{cases}$$

$$(a_2b_1 - a_1b_2)x = c_2b_1 - b_2c_1$$

$$x = \frac{c_2b_1 - c_1b_2}{a_2b_1 - b_2a_1}.$$



**Задача 6.** На доске массой  $m_1 = 1$  кг лежит брусок массой  $m_2 = 200$  г.

Определите, с какой максимальной горизонтальной силой можно тянуть доску, чтобы брусок не соскользнул с нее. Коэффициенты трения скольжения между доской и полом  $\mu_1 = 0,2$ , между доской и бруском  $\mu_2 = 0,3$ .

**Решение.**

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F} + m_1 \vec{g} + \vec{F}_o + \vec{N}_1 + \vec{F}_{mp1} + \vec{F}'_{mp2}$$

$$m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{mp2}$$

$$\text{ось } OX : m_1 a_1 = F - F_{mp1} + F'_{mp2}$$

$$m_2 a_2 = F_{mp2}$$

$$\text{ось } OY : 0 = N_2 - m_2 g,$$

$$0 = N_1 - F_o - m_1 g$$

$$F_{mp2} = \mu_2 m_2 g$$

$$F_{mp1} = \mu_1 (m_1 + m_2) g$$

$$\begin{cases} m_1 a = F - \mu_1 (m_1 + m_2) g - \mu_2 g m_2 \\ m_2 a = \mu_2 m_2 g \end{cases}$$

$$m_1 \mu_2 g = F - \mu_1 (m_1 + m_2) g - \mu_2 g m_2 \rightarrow F = (\mu_1 + \mu_2) (m_1 + m_2) g.$$

**Задача 7.** Два бруска нижний массой 0,4 кг, а верхний массой 0,2 кг поместили на наклонную плоскость с углом наклона  $45^\circ$ , как показано на рисунке.

Коэффициент трения нижнего бруска 1, верхнего – 0,1. Определите силу давления верхнего бруска на нижний.

**Решение.**

$$m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{mp1} + \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{mp2} + \vec{F}_{21}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

на ось  $X$ :

$$m_1 a = m_1 g \sin \alpha - F_{mp1} + F_{12}$$

$$m_2 a = m_2 g \sin \alpha - F_{mp2} - F_{21}$$

на ось  $Y$ :

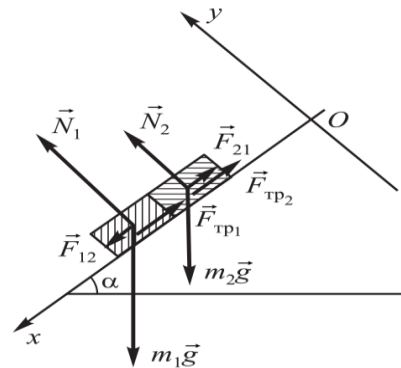
$$0 = -m_1 g \cos \alpha + N_1$$

$$0 = -m_2 g \cos \alpha + N_2$$

$$F_{mp1} = m_1 N_1 = \mu_1 m_1 g \cos \alpha, \quad F_{mp2} = \mu_2 m_2 g \cos \alpha$$

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha + F_{12} & \times m_2 \\ m_2 a = m_2 g \sin \alpha - \mu_2 m_2 g \cos \alpha - F_{12} & \times m_1 \end{cases}$$

$$F_{12} = \frac{(\mu_1 - \mu_2) m_1 m_2 g \cos \alpha}{m_1 + m_2} = 0,83 \text{ Н.}$$



**Задача 8.** Найдите заряды конденсаторов в цепи, показанной на рисунке. ЭДС источников 10 и 4 В, емкости конденсаторов 5 мкФ, 10 мкФ и 20 мкФ.

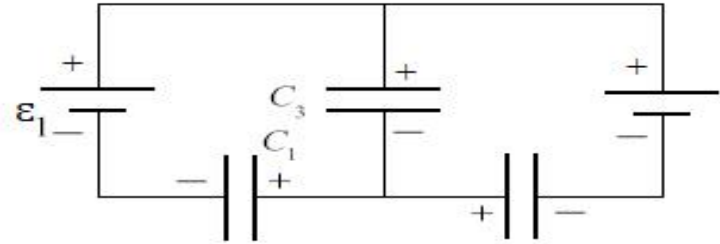
**Решение.**

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 0 \\ \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_3}{C_3} = -\mathcal{E}_1 \\ \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} = -\mathcal{E}_2 \end{cases}$$

$$q_1 = -C_1 \left( \mathcal{E}_1 + \frac{q_3}{C_3} \right)$$

$$q_2 = -C_2 \left( \mathcal{E}_2 + \frac{q_3}{C_3} \right)$$

$$q_3 \left( 1 - \frac{C_1 + C_2}{C_3} \right) = \frac{C_1 \mathcal{E}_1 + C_2 \mathcal{E}_2}{C_3}.$$



**Задача 9.** Определите силы токов во всех участках цепи.

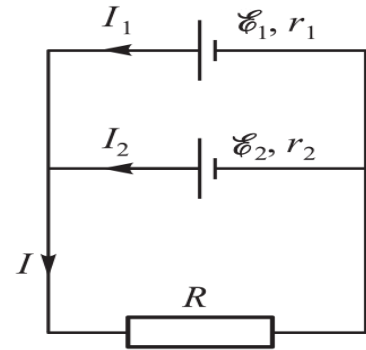
**Решение.**

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ I_1 r_1 + IR = \mathcal{E}_1 \\ I_2 r_2 + IR = \mathcal{E}_2 \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - IR}{r_1} \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - IR}{r_2},$$

$$I \left( 1 + \frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2} \right) = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$



**Задача 10.** Определите скорости двух шаров  $u_1$  и  $u_2$  после прямого абсолютно упругого удара. Массы шаров  $m_1$  и  $m_2$ , скорости до удара  $v_1$  и  $v_2$  соответственно.

**Решение.**  $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$

$$m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1u_1 + m_2u_2$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$$

$$m_1(v_1 + u_1) = m_2(v_2 + u_2)$$

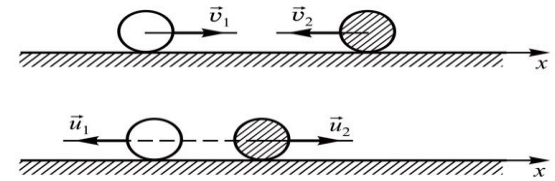
$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2)$$

$$v_1 \neq -u_1; v_2 \neq -u_2$$

$$v_1 - u_1 = u_2 - v_2 \quad u_2 = v_1 + v_2 - u_1$$

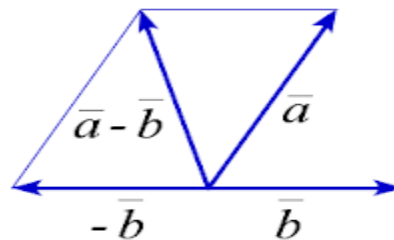
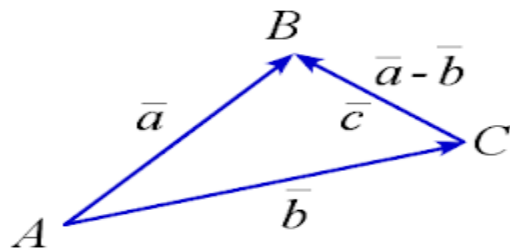
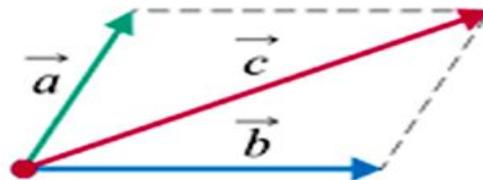
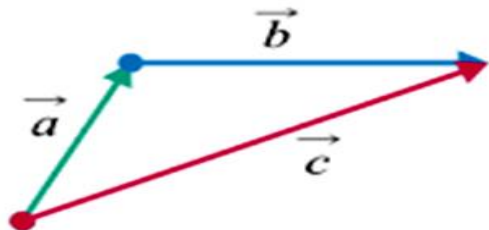
$$m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1u_1 + m_2(v_1 + v_2 - u_1) - m_2u_1$$

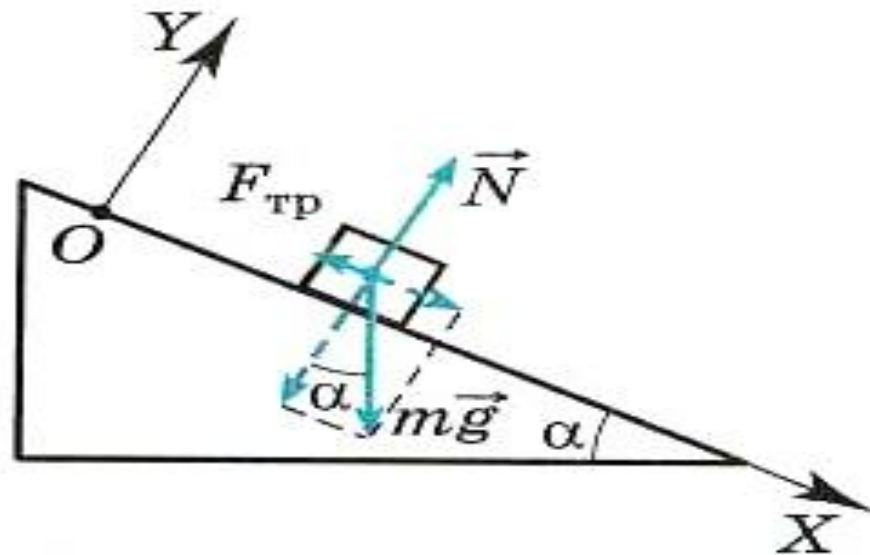
$$u_1 = \frac{2m_2v_2 + v_1(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \quad u_2 = \frac{2m_1v_1 + v_2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$



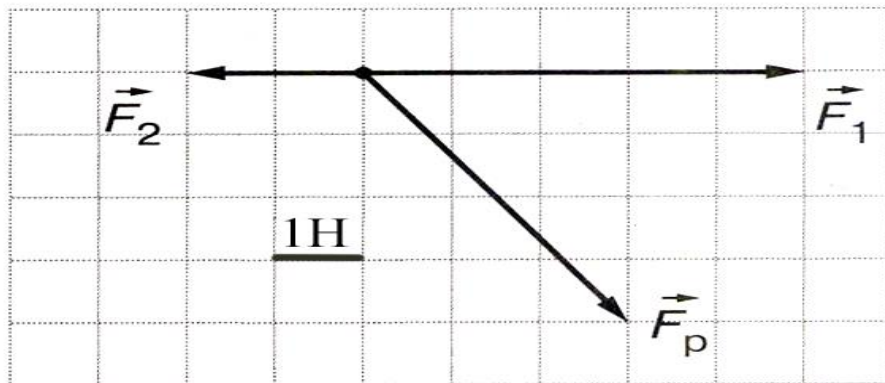
# Сложение и вычитание векторов

## Закон относительности движения





Чему равен (в заданном масштабе) модуль третьей силы, приложенной к телу?





**Задача 10.** Два автомобиля подъезжают к развилке дороги со скоростями 72 и 54 км/ч и разъезжаются по двум дорогам, угол между которыми  $90^\circ$ .

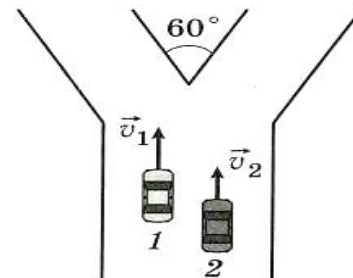
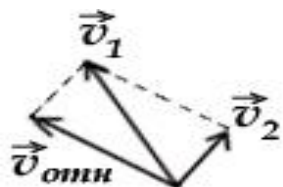
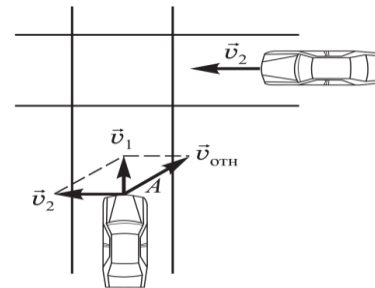
Определите скорость первого автомобиля относительно второго до

и после развилки.  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_{\text{отн1}}$

$$\vec{v}_{\text{отн1}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$v_{\text{отн1}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 50 \text{ км/ч}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{v_2}{v_1} \quad \alpha \approx 37^\circ.$$



**Задача 11.** Два трактора вытягивают застрявшую машину с помощью нерастяжимых тросов. Угол между канатами равен  $\alpha$ , а скорости тракторов  $v_1$  и  $v_2$ . Определите модуль и направление скорости машины.

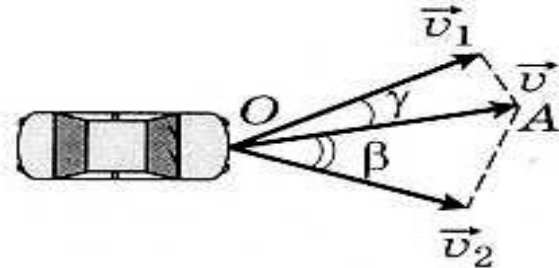
**Решение.**

$$\alpha = \beta + \gamma$$

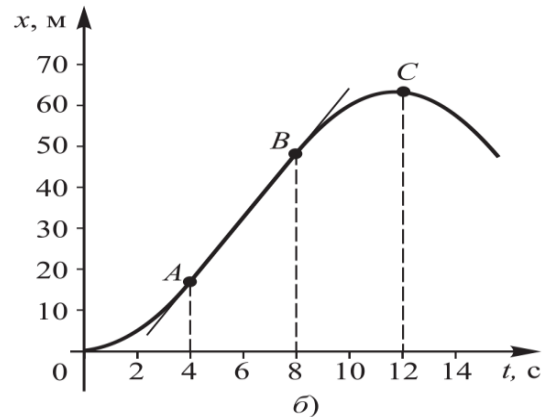
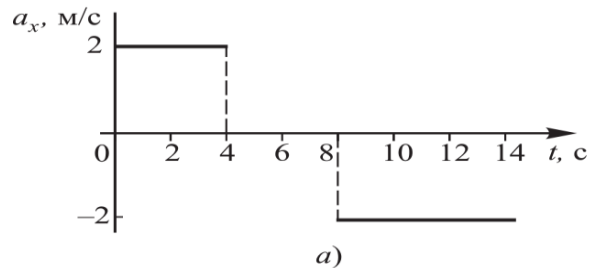
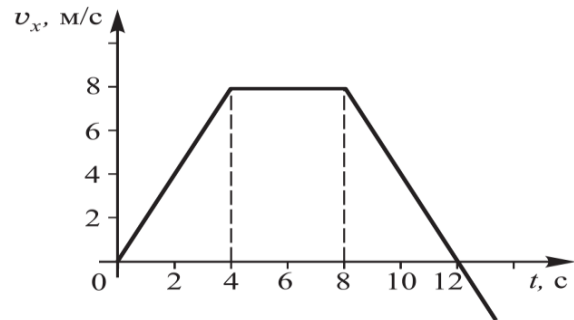
$$v = \frac{v_1}{\cos \gamma} = \frac{v_2}{\cos \beta}$$

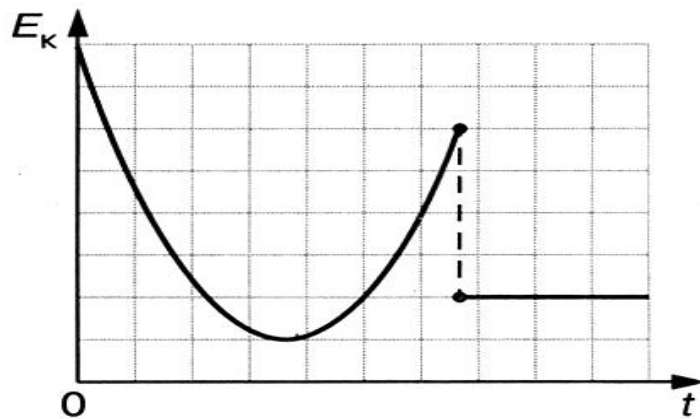
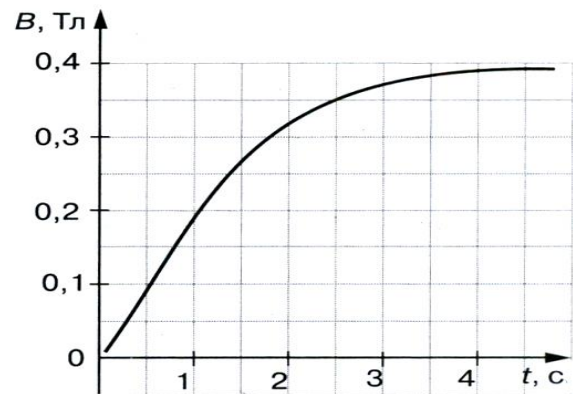
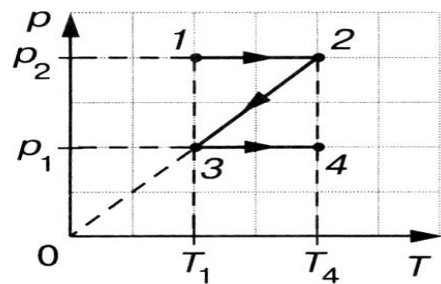
$$v_1 \cos \beta = v_2 \cos (\alpha - \beta)$$

$$v_1 \cos \beta = v_2 \left( \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \right)$$

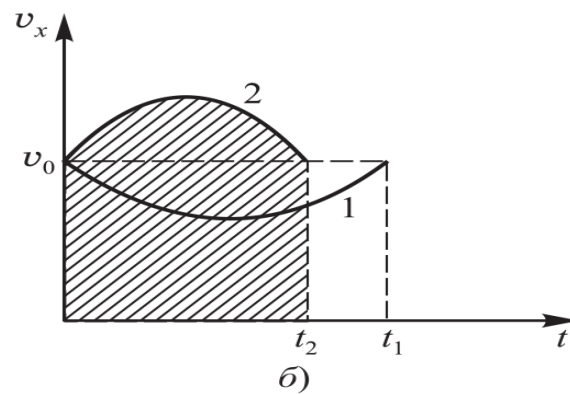
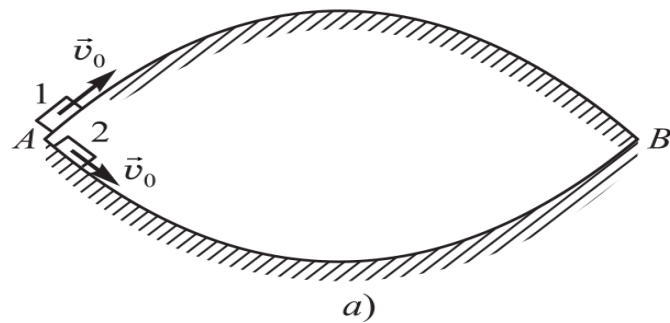
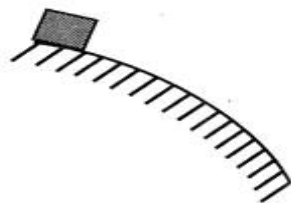
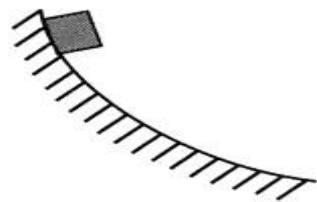


# Графики в физике





# Графическое решение задач



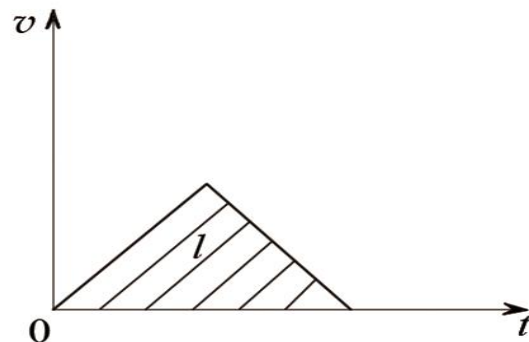
## Неравенства

**Задача 12.** За одну секунду тело, начиная двигаться из состояния покоя, прошло 1 м и остановилось. Определите, больше какой величины должно быть равно ускорение на некотором промежутке времени, чтобы данное решение могло быть реализовано?

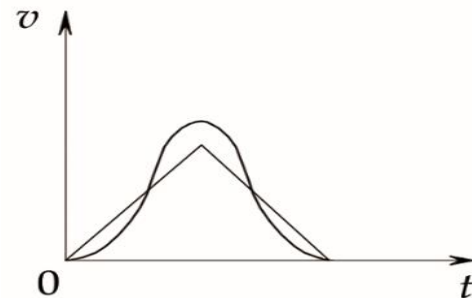
### Решение.

Из условия задачи очевидно, что в течение какого-то промежутка времени тело движется ускоренно, а затем замедленно. Возьмем обычный случай, когда тело сначала движется равноускоренно, а затем равнозамедленно.

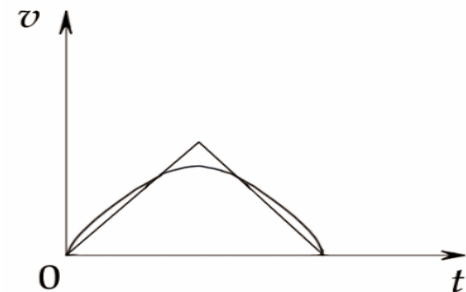
Площадь треугольника равна 1.  $l = \frac{v_{max}t}{2} = \frac{(a_0t/2)t}{2} \rightarrow a_0 = 4 \text{ м / с}^2$



1) Предположим, что тело начинает двигаться с меньшим ускорением, однако, чтобы площади под графиками были равны, в какой-то момент времени его ускорение должно быть больше  $a_0$ .



2) Если предположить, что тело начинает двигаться с большим ускорением, то из тех же соображений очевидно, что в некоторый момент времени оно неизбежно должно стать меньше  $a_0$ .



Следовательно, искомое ускорение равно  $4 \text{ м/с}^2$ .

## 1) Оформление результата опыта

$$a_{cp} - \Delta a \leq a \leq a_{cp} + \Delta a$$

## 2) Применение законов классической механики

$$v < c$$

## 3) Анализ процессов. $F_{Арх} < mg \rightarrow$ тело тонет

Пример.

$$F_{Арх} = mg \rightarrow \text{безразличное равновесия}$$

$$mg < F_{Арх} \rightarrow \text{тело всплывает}$$



# Задачи, в которых число неизвестных превышает число уравнений системы

**Задача 12.** Если человек бежит по эскалатору со скоростью  $v$  то он насчитывает  $N_1$ . Если он увеличивает скорость в 2 раза, то  $N_2$  ступенек. Определите сколько ступенек на неподвижном эскалаторе?

**Решение.**

$$N = (v + v_3)t_1 \quad N = (2v + v_3)t_2$$

$$N_1 = vt_1 \quad N_2 = 2vt_2$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{t_1}{2t_2} \quad \frac{t_1}{t_2} = 2 \frac{N_1}{N_2}$$

$$N - N_1 = v_3 t_1 \quad N - N_2 = v_3 t_2$$

$$\frac{N - N_1}{N - N_2} = 2 \frac{N_1}{N_2}$$

$$N \left( 2 \frac{N_1}{N_2} - 1 \right) = N_1 \rightarrow N = \frac{N_1 N_2}{2N_1 - N_2} \quad N = \frac{20 \cdot 30}{40 - 30} = 60$$

## Список литературы

1. Мякишев Г.Я, Б.Б. Буховцев, и др. Физика, Классический курс. 10 и 11 классы. «Просвещение»
2. Н.А. Парфентьева. Сборник задач по физике. 10 и 11 классы.

2019. «Просвещение»

3. Связь математики с физикой | LightCone  
lightcone.ru > math-vs-phys 2017 г.

4. О роли математики в физике: Oculus — LiveJournal  
Oculus.livejournal.com > ...

Спасибо за внимание!