КАКОВЫ ОСОБЕННОСТИ ЭТОЙ КНИГИ? КАК ЕЁ МОЖНО ИСПОЛЬЗОВАТЬ?

Расскажи мне — и я забуду.
Покажи мне — и я запомню.
Вовлеки меня — и я **научусь**!

Конфуций (6-й век до нашей эры)

Самое главное —
не переставать задавать **вопросы**.

Эйнштейн (20-й век нашей эры)

В этой книге в *форме диалогов* между учителем и учениками представлен *курс геометрии 7-го класса* в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом.

Мы надеемся, что книга будет полезной ученикам и учителям (в том числе репетиторам). Расскажем об особенностях книги и возможностях её использования.

УЧЕНИКУ

ВАМ БУДЕТ ИНТЕРЕСНО ИЗУЧАТЬ ГЕОМЕТРИЮ!

В этой книге собраны интересные беседы (диалоги) учителя математики и его учеников. Ученики то и дело задают вопросы учителю, а он часто предлагает наводящие вопросы, чтобы помочь ребятам найти ответы самим.

При изучении геометрии по этой книге Вы научитесь не только решать задачи, но и *ставить* их. А постановка задач, как Вы сами убедитесь, лучший и самый интересный способ научиться решать задачи. К некоторым задачам в конце книги приведены *Советы*. Воспользовавшись ими, Вы справитесь с задачами, которые на первый взгляд покажутся Вам трудными. Правильность своих решений Вы сможете проверить, заглянув в *Ответы и решения*.

РАЗНЫЕ УРОВНИ СЛОЖНОСТИ

Простые задачи отмечены одной звёздочкой, а более трудные — двумя и тремя звёздочками. Не бойтесь этих звёздочек: ведь узнать границы возможного можно только одним способом — попытавшись *преодолеть* их!

Эта книга поможет как тем, у кого пока есть проблемы с изучением геометрии в школе, так и тем, кто собирается участвовать в математических олимпиадах и *побеждать* в них.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОЕКТНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

Такие материалы собраны в последней главе книги «Не боги горшки обжигают». Смысл этой пословицы таков: беритесь за то, что кажется трудным — Вы можете *справиться* и *победить*!

УЧИТЕЛЮ

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ПОДХОД К ОБУЧЕНИЮ

В этой книге последовательно реализован *исследовательский подход к обучению* в соответствии с современными требованиями. Приведено много *примеров учебных диалогов*, которые являются лучшей формой обучения мышлению.

Отличительной особенностью книги является то, что в ней много заданий исследовательского типа — например, «открытых» заданий, в которых ученикам предлагается выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их, что соответствует новому ФГОС (2021 г.), а также самим ставить вопросы по рисунку или словесному описанию фигуры, а затем находить ответы на свои вопросы.

Добрую помощь Вашим ученикам окажут обширные разделы «Советы» и «Ответы и решения».

ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

При встрече с новой задачей по геометрии многие ученики не знают: с чего начать решение? Эта неопределённость формирует отрицательное отношение к предмету, а на контрольных и экзаменах порождает панику, блокирующую даже усвоенные знания.

Упомянутая неопределённость обусловлена тем, что внимание ученика фокусируется на *вопросе* задачи, из-за чего он не обращает должного внимания на её *условие* — а ведь только в условии задачи можно найти ключи к её решению!

Поэтому чтобы научить ребят решать задачи, надо прежде всего приучить их переключать внимание с поиска прямого ответа на *вопрос* задачи на *исследование условия* — в этом и проявляется *исследовательский подход*. В нашей книге Вы встретите много заданий, в которых ученику предлагается *исследовать условие* и самому поставить вопросы к нему: это самый эффективный способ обучения решению задач. К тому же он значительно повышает мотивацию школьников к изучению геометрии и снимает у них стресс перед «новыми задачами».

УЧЕБНЫЕ ДИАЛОГИ

Приведённые в книге многочисленные примеры диалогов (не только между учителем и учениками, но и между учениками!) помогут вам организовывать учебные диалоги в своём классе по всем темам школьного курса геометрии. Используйте сюжеты этих диалогов, видоизменяйте и развивайте их.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УЧЕБНЫХ ИГР

Эффективность урока значительно возрастёт, если Вам удастся вовлечь как можно больше учеников в поиск ответов на поставленные вопросы, а ещё лучше — в *постановку новых вопросов*. Это можно реализовать в групповых учебных играх. При этом более сильные ученики помогают более слабым, что полезно и тем, и другим.

Материалы для таких игр собраны в отдельной книге тех же авторов **«Геометрические игры. Раздаточные материалы для групповой работы»** (серия «Открываем Геометрию»).

ОБУЧАЮЩИЕ И КОНТРОЛИРУЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

Задачи с одним правильным ответом можно назвать *контролирующими*, потому что с их помощью удобно *проверять* правильность выполнения заданий у многих учеников. Поэтому таких задач подавляющее большинство. Однако с их помощью очень трудно *научить* школьников *решать* задачи (об этом сказано выше). К тому же для многих контролирующих задач есть решения в «готовых домашних заданиях».

В этой книге Вы найдёте много *обучающих* заданий — в основном исследовательского типа. При выполнении таких заданий ученик совершает свои, пусть небольшие, *открытия*, — например, обнаруживая или доказывая свойства и признаки геометрических фигур.

Однако мы позаботились также и о достаточном количестве *контролирующих* заданий: они собраны в отдельной книге тех же авторов **«Задания по геометрии для *самостоятельных* самостоятельных»** (серия «Открываем Геометрию»). Эти задания предлагают Вашим ученикам проявить *двойную* самостоятельность.

Во-первых, каждый ученик *становится соавтором своего задания*, дополняя его.

Во-вторых, благодаря этому ученики *не смогут списывать друг у друга*, даже если соседи по парте получат одинаковые задания (карточки).

Пример такого задания: «Начертите две пересекающиеся прямые. Задайте градусную меру одного из углов на рисунке, запишите и подчеркните. Найдите градусные меры остальных углов и запишите их с кратким обоснованием».

Отметим, что задания с тремя звёздочками предназначены главным образом для тех, кто изучает математику на углублённом уровне.

Желаем успехов Вам и Вашим ученикам!

ГЛАВА 4. РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

ВСТРЕЧА 12

1. ЗНАКОМСТВО С РАВНОБЕДРЕННЫМ ТРЕУГОЛЬНИКОМ

У: Сегодня мы рассмотрим важный частный случай треугольников — равнобедренный треугольник.

Равнобедренным называют треугольник, у которого две стороны равны.

Вы скоро убедитесь, что равнобедренные треугольники — верные помощники в исследовании геометрических фигур. В частности, они помогут нам доказать третий признак равенства треугольников.

Равные стороны равнобедренного треугольника называют *боковыми* сторонами, а третью сторону — *основанием*.

На рисунке 1 изображён равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами AB и BC и основанием AC.

Записывая обозначение равнобедренного треугольника, надо указывать его основание или боковые стороны.

Ф: А если положить треугольник, изображённый на рисунке 1, «на бок» (рис. 2), останется ли он равнобедренным?

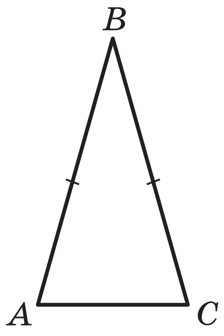


Рис. 1

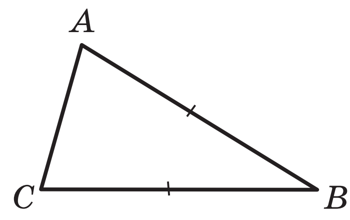


Рис. 2

У: Да, останется: если две стороны треугольника равны, то он *по определению* является равнобедренным, а его *равные* стороны называют *боковыми* — независимо от того, как расположен треугольник.

***1.** Какие стороны равнобедренного треугольника, изображённого на рисунке 2, являются боковыми? Нарисуйте схематически три-четыре различные положения одного и того же равнобедренного треугольника и отметьте на рисунках равные стороны.

***2.** Сколько равнобедренных треугольников на рисунке 3? Запишите обозначения этих треугольников с указанием основания или боковых сторон.

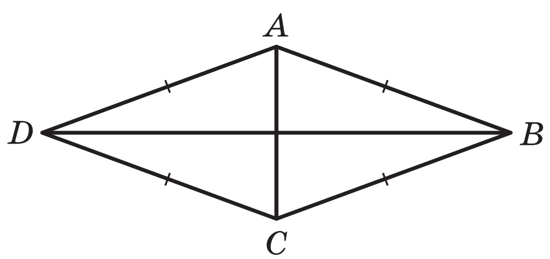


Рис. 3

**3. Начертите отрезки AB и CD равной длины, которые, пересекаясь в точке O, делятся оба пополам. Дополните этот чертёж так, чтобы на нём появились 4 равнобедренных треугольника. Запишите обозначения этих треугольников с указанием основания или боковых сторон.

Ф: А как называют треугольник, у которого равных сторон нет?

У: Треугольник, у которого длины всех сторон различны, называют *разносторонним*.

К: А как называют треугольник, у которого все стороны равны?

У:

Треугольник, у которого все стороны равны, называют *равносторонним* или *правильным* (рис. 4).

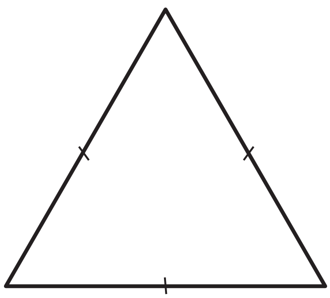


Рис. 4

*4. Проверьте свой глазомер. Нарисуйте от руки *равносторонний* треугольник. Затем, используя циркуль, проверьте: действительно ли этот треугольник получился равносторонним?

К: А можно ли считать равносторонний треугольник равнобедренным?

У: Да, мы будем считать равносторонний треугольник частным случаем равнобедренного.

Ф: Тогда у равностороннего треугольника любые две стороны — боковые, и любая его сторона — основание.

У: Так и есть.

2. СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

У: Вырежьте из бумаги равнобедренный треугольник и сложите его так, чтобы *равные* боковые стороны наложились одна на другую (рис. 5). Какой вывод можно сделать из этого опыта?

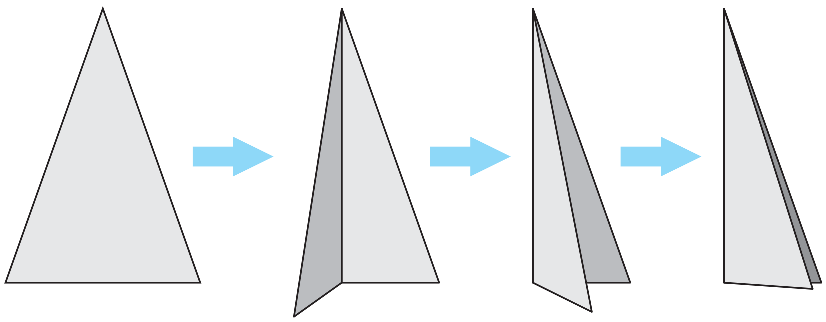


Рис. 5

Ф: Этот опыт показал, что равнобедренный треугольник *можно разбить на два равных треугольника*: они совместились при наложении.

У: А что можно сказать о линии сгиба на рисунке 5?

К: Она разделила угол треугольника на два равных угла: они совместились при наложении. Значит, линия сгиба — биссектриса угла, противоположного основанию.

У: Сделаем теперь соответствующий нашему опыту чертёж. Проведём в равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрису BD (рис. 6).

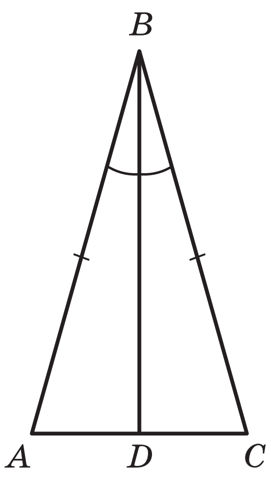


Рис. 6

***5.** Докажите равенство треугольников ABD и CBD.

У: Итак,

> биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, делит треугольник на два равных треугольника.

Воспользуйтесь теперь *свойствами* равных треугольников.

Ф: У равных треугольников все соответственные стороны равны и все соответственные углы равны (рис. 7).

У: Правильно. Какие выводы о равнобедренном треугольнике можно сделать из рисунка 7?

К: Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

Ф: Биссектриса, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является также медианой.

К: Я ещё кое-что заметила. Углы ADB и CDB — смежные, поэтому их сумма равна 180°. А раз эти углы равны, то каждый из них — *прямой* (рис. 8). Значит, биссектриса, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является также и высотой!

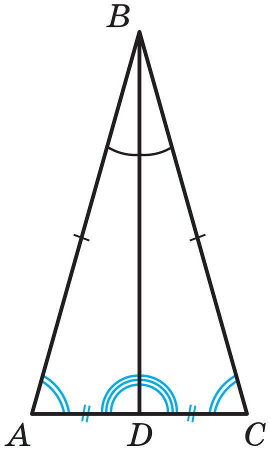


Рис. 7

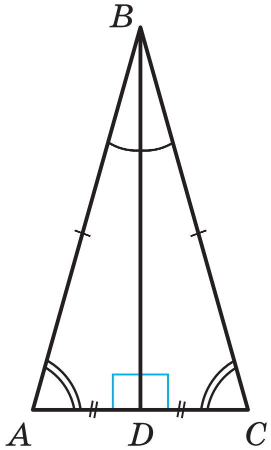


Рис. 8

У: Изобразим всё, что мы узнали, в виде схемы (рис. 9).

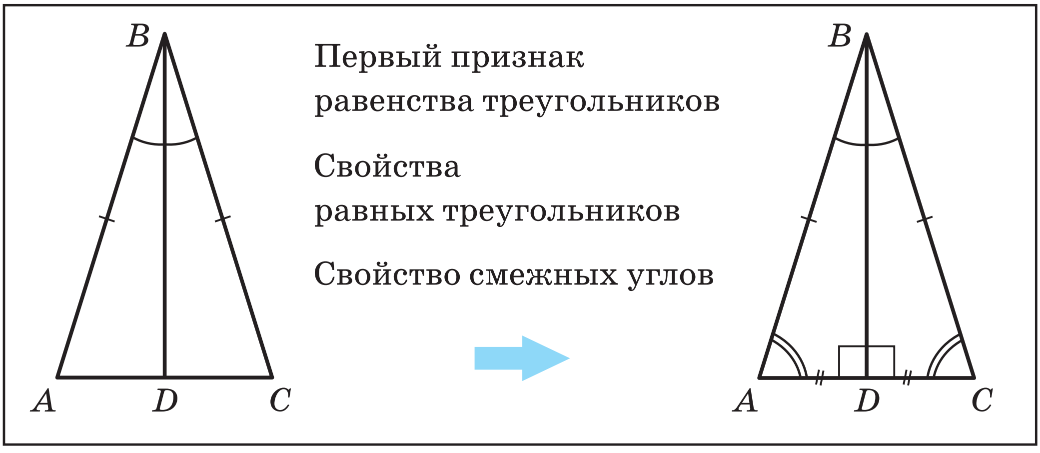


Рис. 9

Изображённая на рисунке 9 схема иллюстрирует *свойства равнобедренного треугольника*:

- углы при основании равнобедренного треугольника равны;
- биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, совпадает с медианой;
- биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, совпадает с высотой.

К: Раз медиана и высота, проведённые к основанию, совпадают с биссектрисой, значит, они совпадают и *друг с другом*. Поэтому можно добавить:

- медиана равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, совпадает с высотой.

***6.** Угол между медианой, проведённой к основанию равнобедренного треугольника, и одной из его боковых сторон равен $28°$. Чему равен угол между этой медианой и другой боковой стороной?

Похожие задания

***7.** Высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, равна 10 см. Она делит основание на отрезки, один из которых равен 6 см. Какую информацию отсюда можно извлечь?

****8.** Медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, равна 22 см, а угол при вершине, противоположной основанию, равен $40°$. Какую информацию отсюда можно извлечь?

****9.** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. Известно, что $\angle ABC = 120°$, $\angle BAC = 30°$. Чему равны углы треугольника CBD?

****10.** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC медиана BM образует со стороной BC угол $25°$.

а) Чему равен угол между биссектрисой BD и стороной AC?

б) Чему равен угол ABC?

****11.** Медиана треугольника делит его на два треугольника, периметры которых равны. Какую информацию отсюда можно извлечь?

****12.** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса BD. Периметр треугольника ABC равен 20 см, а периметр треугольника ABD равен 15 см. Чему равна высота треугольника ABC, проведённая к основанию?

Похожее задание

****13.** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона равна 13 см, а высота BH равна 12 см. Периметр треугольника ABH равен 30 см. Чему равно AC?

СВОЙСТВА РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА

***14.** Докажите, что если треугольник равносторонний, то:
а) все его углы равны;
б) биссектриса, медиана и высота, проведённые из любой вершины, совпадают;
в) все биссектрисы равны;
г) все медианы равны;
д) все высоты равны.

****15.** На сторонах равностороннего треугольника ABC отметили точки M, N, K так, что $AK = BM = CN$ (рис. 10). Является ли треугольник MNK тоже равносторонним? Обоснуйте свой ответ.

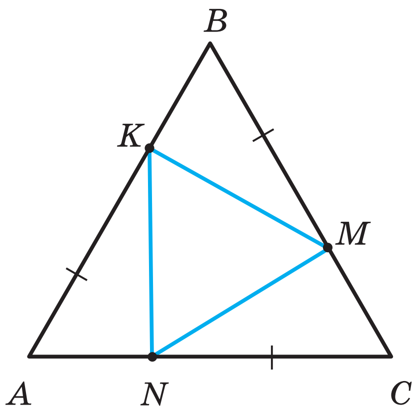


Рис. 10

Похожее задание

16. На продолжениях сторон равностороннего треугольника ABC отметили точки K, M, N так, что $AM = BK = CN$ (рис. 11). Является ли треугольник KNM тоже равносторонним? Обоснуйте свой ответ.

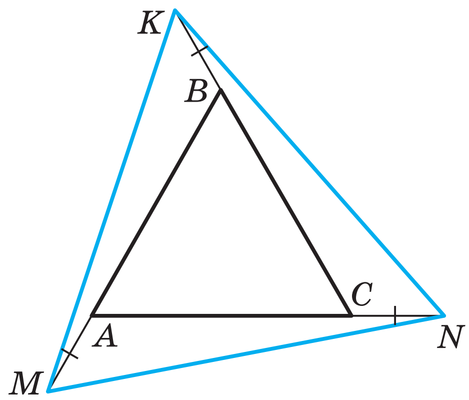


Рис. 11

---

17. Вершины треугольника обозначены A, B, C.

а) Докажите, что если $\triangle ABC = \triangle CBA$, то треугольник ABC равнобедренный. Какие его стороны являются боковыми сторонами?

б) Докажите, что если $\triangle ABC = \triangle BCA$, то треугольник ABC равносторонний.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

У: Мы доказали выше основные свойства равнобедренного треугольника: углы при основании равны; биссектриса, медиана и высота, проедённые к основанию, совпадают. Кроме этого, у равнобедренного треугольника есть и другие свойства — назовём их дополнительными. Докажем здесь некоторые из них.

Замечу: в контрольных работах и на экзаменах можно, не приводя доказательств, применять только *основные* свойства равнобедренного треугольника. Дополнительные же свойства надо каждый раз *доказывать*.

**18. Докажите, что биссектрисы углов равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны.

Похожее задание

**19. Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны.

НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА РАВНОБЕДРЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

У: Доказанные нами ранее первый и второй признаки равенства треугольников применимы к любым треугольникам. Для равнобедренных же треугольников можно доказать некоторые дополнительные признаки равенства, используя то, что у этих треугольников две стороны равны по определению. Поэтому для установления равенства двух равнобедренных треугольников достаточно равенства не трёх, а только *двух* определённых элементов этих треугольников.

В контрольных и на экзаменах эти дополнительные признаки равенства надо *доказывать*.

*20. Докажите, что если боковая сторона и угол между боковыми сторонами одного равнобедренного треугольника соответственно равны боковой стороне и углу между боковыми сторонами другого равнобедренного треугольника, то эти треугольники равны.

*21. Докажите, что если основание и угол при основании одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и углу при основании другого равнобедренного треугольника, то эти треугольники равны.

**22. Докажите, что если основание и проведённая к нему медиана, биссектриса или высота одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и проведённой к нему медиане, биссектрисе или высоте другого равнобедренного треугольника, то эти треугольники равны.

**23. Докажите, что если угол между боковыми сторонами и медиана, биссектриса или высота, проведённая из вершины этого угла одного равнобедренного треугольника соответственно равны углу между боковыми сторонами и высоте, медиане или биссектрисе, проведённой из вершины этого угла другого равнобедренного треугольника, то эти треугольники равны.

ВСТРЕЧА 13

3. ПРИЗНАКИ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

ЗАЧЕМ НУЖНЫ ПРИЗНАКИ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА?

У: Чтобы использовать свойства равнобедренного треугольника, надо сначала убедиться, что рассматриваемый треугольник действительно *равнобедренный*. Если это явно не задано, то надо воспользоваться *признаками* равнобедренного треугольника.

ДВА УГЛА РАВНЫ

У: Докажем, что

если два угла треугольника равны, то он равнобедренный, причём против равных углов лежат равные стороны (рис. 12).

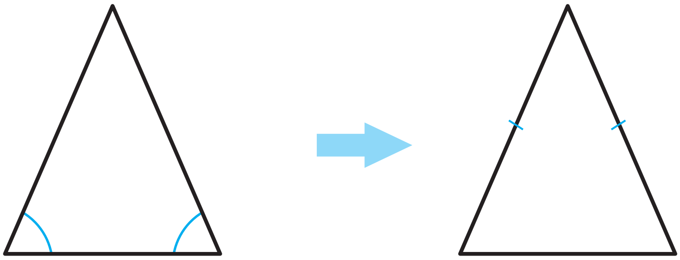


Рис. 12

Пусть, например, углы A и C треугольника ABC равны (рис. 13).

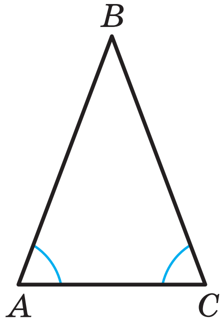


Рис. 13

Построим треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC и докажем, что треугольник $A_1B_1C_1$ равнобедренный. Отсюда будет следовать, что треугольник ABC также равнобедренный.

Для построения треугольника $A_1B_1C_1$ построим сначала отрезок A_1C_1, равный AC.

Отложим затем от начала луча A_1C_1 угол A и отметим B_1 точку пересечения стороны этого угла с прямой, перпендикулярной отрезку A_1C_1 и проходящей через его середину O (рис. 14). Проведём отрезки A_1B_1 и B_1C_1.

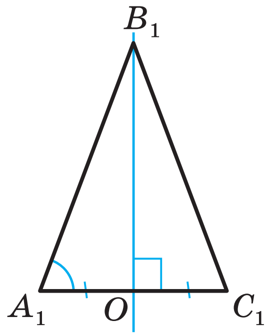


Рис. 14

Треугольники A_1OB_1 и C_1OB_1 равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда следует, во-первых, что треугольник $A_1B_1C_1$ равнобедренный, а во-вторых, что он равен треугольнику ABC по второму признаку равенства треугольников ($A_1C_1 = AC$, $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$).

ВЗАИМНО ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ

У: Сравним доказанные нами свойство и признак равнобедренного треугольника. Для наглядности сформулируем эти две теоремы сходным образом.

1) **Свойство** равнобедренного треугольника: *если* две стороны треугольника равны (треугольник равнобедренный), *то* два угла, лежащие против этих сторон, равны.

2) **Признак** равнобедренного треугольника: *если* два угла треугольника равны, *то* две стороны, лежащие против этих углов равны (треугольник равнобедренный).

Что *общего* в формулировке этих теорем?

К: Обе теоремы состоят из двух частей: первая начинается со слова «если», а вторая — со слова «то».

У: Правильно! Каждая теорема состоит из двух частей: *условия* и *заключения*. В условии говорится, что *дано*, а в заключении — что *требуется доказать*.

Поэтому теорему всегда можно переформулировать так, чтобы условие начиналось со слова «если», а заключение начиналось со слова «то». Изобразим структуру теоремы в виде схемы (рис. 15):

Структура теоремы

Условие		Заключение
Если... *(дано)*	→	**то...** *(требуется доказать)*

Рис. 15

Эта схема наглядно показывает, что *каждая теорема позволяет извлекать некоторую информацию*: используя то, что *дано*, мы находим то, что *требуется доказать*. В этом и состоит ценность теорем для исследования геометрических фигур и решения задач по геометрии.

***24.** Что является условием и что — заключением в теореме о *свойстве* равнобедренного треугольника?

***25.** Что является условием и что — заключением в теореме о *признаке* равнобедренного треугольника?

Ф: И всё-таки свойство и признак равнобедренного треугольника очень уж похожи: в каждой из этих теорем говорится о двух равных сторонах и двух равных углах треугольника.

У: Согласен. Давайте поэтому обратим внимание на то, чем эти теоремы *отличаются* одна от другой.

К: В этих теоремах *условие и заключение меняются ролями*: условие первой теоремы является заключением второй, а условие второй является заключением первой.

У: Правильно. Такие теоремы называют взаимно *обратными*.

Ф: Представим и это в виде схемы (рис. 16):

Свойство равнобедренного треугольника

Если две стороны треугольника равны…	→	**…то** два угла треугольника равны.

Признак равнобедренного треугольника

Если два угла треугольника равны…	→	**…то** две стороны треугольника равны.

Рис. 16

У: Выполнив следующее задание, вы увидите, что не для каждой теоремы существует обратная ей. Напомню, что теоремой называют *истинное* утверждение, справедливость которого доказывают с помощью рассуждений.

***26.** Сформулируйте утверждение, обратное теореме о вертикальных углах. Истинно ли такое утверждение?

У: Для теорем о свойствах равнобедренного треугольника есть обратные теоремы, которые являются *признаками* равнобедренного треугольника. Докажем их.

МЕДИАНА СОВПАДАЕТ С ВЫСОТОЙ

***27.** Докажите, что

> если одна из медиан треугольника совпадает с высотой, проведённой из той же вершины, то треугольник равнобедренный (рис. 17).

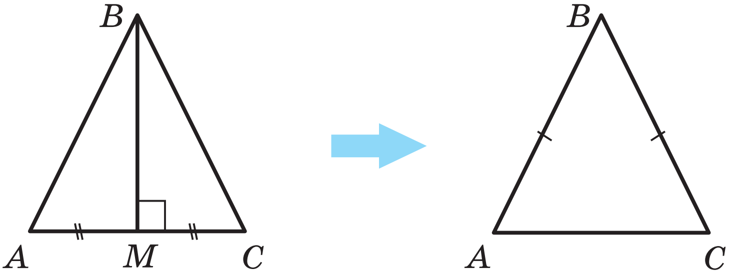


Рис. 17

БИССЕКТРИСА СОВПАДАЕТ С ВЫСОТОЙ

***28.** Докажите, что

если одна из биссектрис треугольника совпадает с высотой, проведённой из той же вершины, то треугольник равнобедренный (рис. 18).

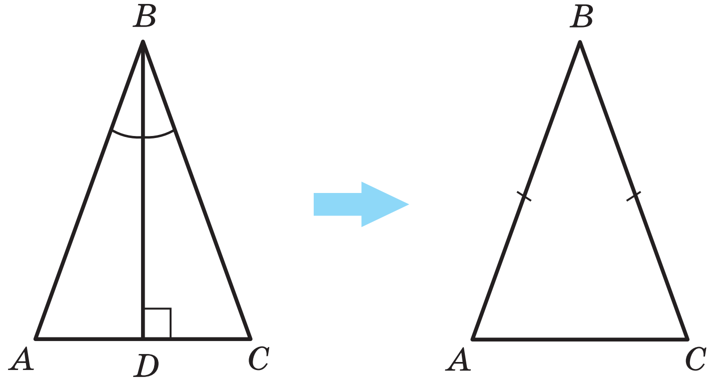


Рис. 18

МЕДИАНА СОВПАДАЕТ С БИССЕКТРИСОЙ

У: Докажите, что

если одна из медиан треугольника совпадает с биссектрисой, проведённой из той же вершины, то треугольник равнобедренный (рис. 19).

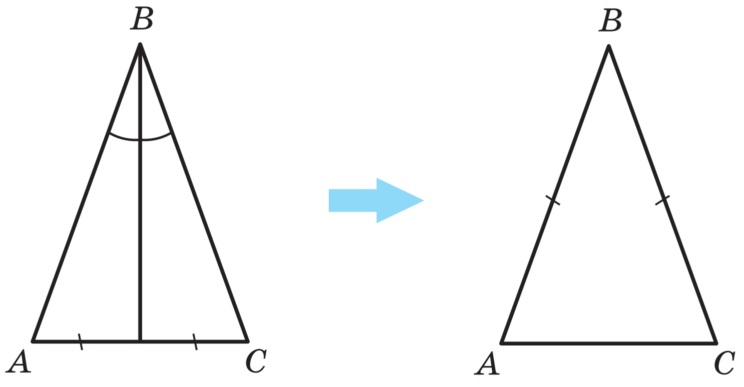


Рис. 19

Этот признак равнобедренного треугольника доказать труднее.

Пусть медиана BM треугольника ABC совпадает с его биссектрисой (рис. 20). Чтобы доказать, что $AB = BC$, достаточно доказать равенство треугольников AMB и CMB.

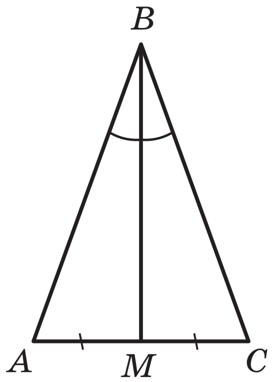


Рис. 20

В этом нам поможет «*удвоение медианы*». Продлим медиану BM до точки N так, чтобы выполнялось равенство $MN = BM$, и соединим отрезком точки A и N (рис. 21).

**29. Докажите, что треугольник AMN на рисунке 21 равен как треугольнику CMB, так и треугольнику AMB.

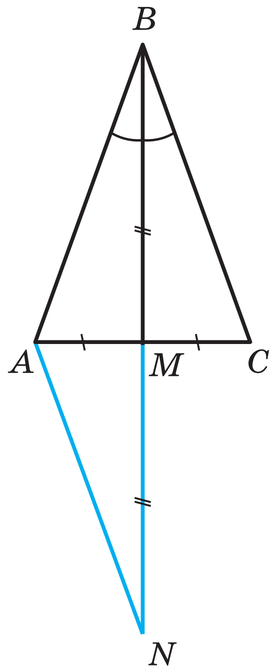


Рис. 21

Из равенств $\triangle AMN = \triangle CMB$ и $\triangle AMN = \triangle AMB$ следует, что $\triangle AMB = \triangle CMB$. А отсюда следует, что $AB = BC$, то есть треугольник ABC — равнобедренный.

**30. В треугольнике ABC высота BH делит сторону AC пополам. Биссектриса угла A равна 15 см, а биссектриса угла B равна 12 см. Какую информацию отсюда можно извлечь?

ПРИЗНАКИ РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА

*31. Докажите, что треугольник является равносторонним, если выполнено *хотя бы одно* из следующих условий:

а) все углы треугольника равны;

б) две медианы треугольника совпадают с высотами, проведёнными из тех же вершин;

в) две медианы треугольника совпадают с биссектрисами, проведёнными из тех же вершин;

г) две биссектрисы треугольника совпадают с высотами, проведёнными из тех же вершин.

4. «ПАСПОРТ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА»

У: Представим в виде схемы всё, что мы узнали о равнобедренном треугольнике (рис. 22).

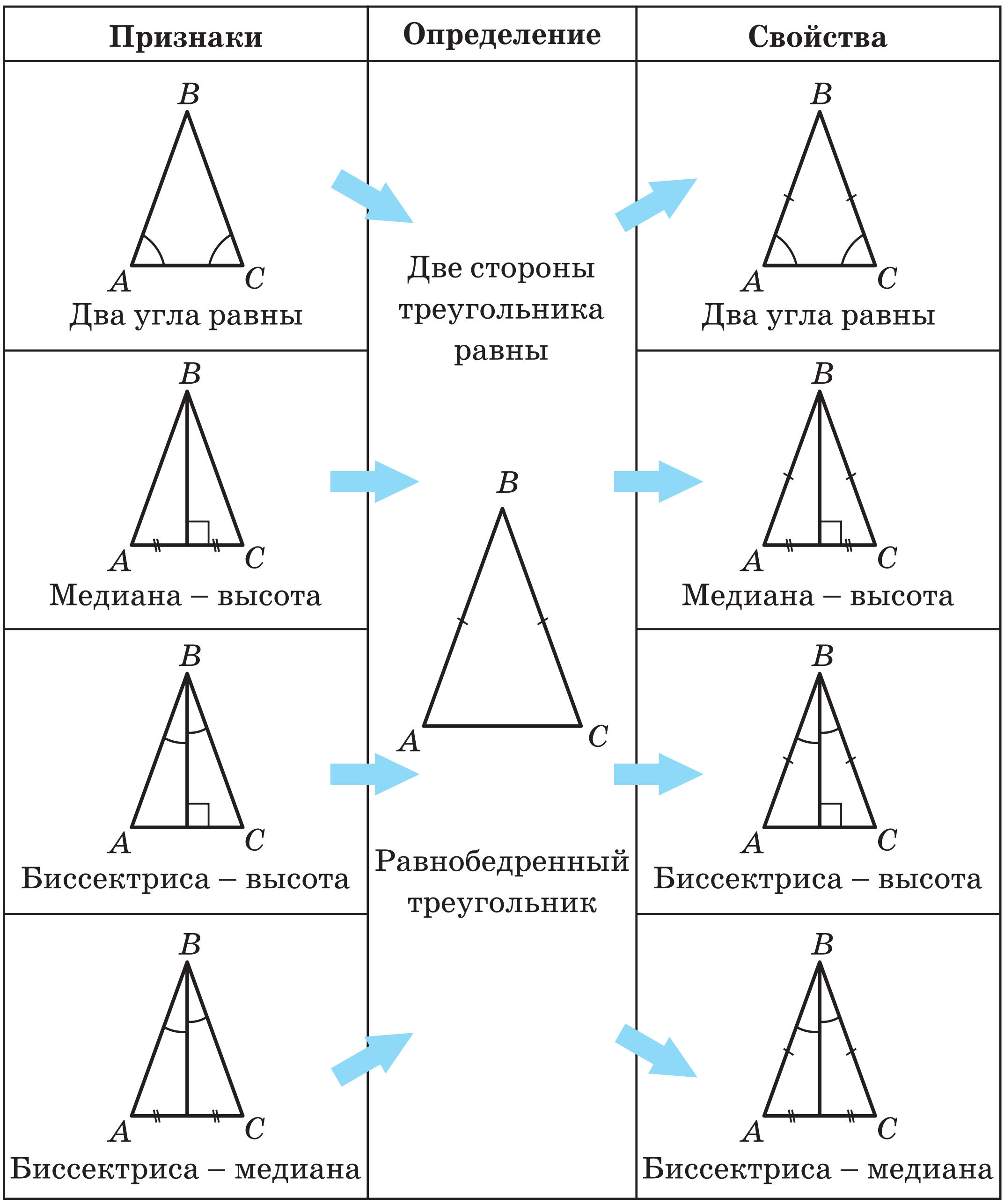


Рис. 22

К: Назовём нашу схему «паспортом равнобедренного треугольника».

***32.** В треугольнике KMN углы K и N равны. Биссектриса какого угла треугольника перпендикулярна противоположной стороне?

****33.** Является ли треугольник с вершинами в серединах сторон равностороннего треугольника тоже равносторонним? Обоснуйте свой ответ.

****34.** О треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle A = \angle B$. Является ли этот треугольник равносторонним? Обоснуйте свой ответ.

****35.** Биссектриса BD треугольника ABC перпендикулярна стороне AC. Периметр треугольника равен 42 см, а $AD = 5$ см. Чему равны все стороны данного треугольника?

Похожее задание

****36.** Медиана BM треугольника ABC делит угол ABC пополам. Периметр треугольника ABM равен 42 см, а высота, проведённая к стороне AC, равна 7 см. Чему равен периметр треугольника ABC?

***37.** Какую информацию можно извлечь из рисунка 23?

Похожее задание

***38.** Какую информацию можно извлечь из рисунка 24?

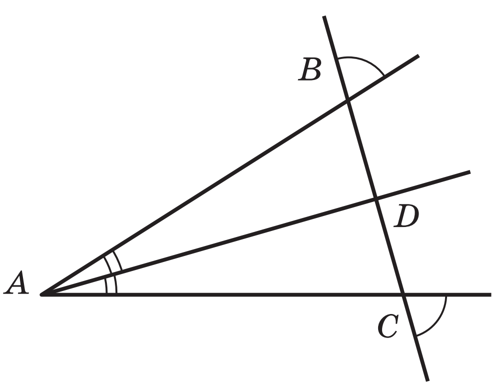


Рис. 23

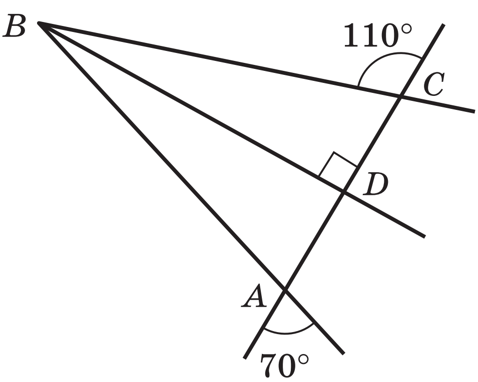


Рис. 24

****39.** О треугольнике ABC известно, что $AB = 12$ см, $BC = 10$ см. На стороне AB отметили точки K и M так, что $AK = KM = MB$. При этом оказалось, что $CM \perp AB$ и $\angle AKC = 114°$.
а) Чему равен периметр треугольника KBC?
б) Чему равен угол ABC?

****40.** Начертите равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами AB и BC и отметьте на этих сторонах соответственно точки M и N так, чтобы выполнялось равенство $BM = BN$. Проведите отрезки AN, CM и MN. Найдите все пары образовавшихся равных треугольников и все равнобедренные треугольники.

Похожие задания

****41.** Начертите равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами AB и BC. Проведите биссектрисы AD и CF. Проведите отрезок DF. Найдите все пары равных треугольников, а также равнобедренные треугольники.

****42.** Начертите равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами AB и BC. Проведите медианы AK и CL. Проведите отрезок KL. Найдите все пары равных треугольников, а также равнобедренные треугольники.

****43.** В равнобедренном треугольнике ABC с прямым углом B и основанием AC проведена медиана BM. Точка D — середина AB, $\angle AMD = 45°$. Найдите все пары равных треугольников, а также равнобедренные и прямоугольные треугольники.

****44.** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса BD. На сторонах BA и BC взяли точки M и N соответственно так, что $\angle MDA = \angle NDC$, и провели отрезки DN, DM и MN. Найдите все пары равных треугольников, а также равнобедренные и прямоугольные треугольники.

*****45.** Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме «равнобедренный треугольник можно разбить на два равных треугольника».

ВСТРЕЧА 14

5. ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

У: Вот мы и добрались, наконец, до третьего признака равенства треугольников. Докажем, что

> если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны.

Пусть для треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC (рис. 25) выполняются равенства:

$$A_1B_1 = AB;\ B_1C_1 = BC;\ A_1C_1 = AC.$$

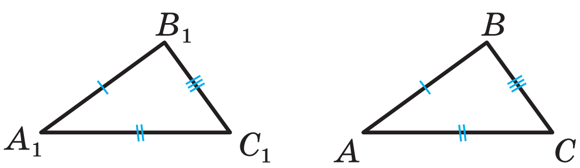


Рис. 25

В этом случае доказать равенство треугольников с помощью «мысленного наложения» — как мы это делали при доказательстве первого и второго признаков равенства треугольников — мы не сможем.

Ф: А что нам мешает накладывать друг на друга соответственно равные стороны?

У: Дело в том, что на этот раз в условии теоремы не говорится о равенстве *углов* треугольников. Поэтому нельзя утверждать, что при наложении одной пары равных сторон треугольников другие пары их равных сторон будут лежать на одних и тех же лучах.

К: Мне кажется, что всё равно надо начинать с наложения равных сторон...

У: Мы так и сделаем, но на этот раз наложим соответственно равные стороны AC и A_1C_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершины B и B_1 лежали по *разные* стороны от прямой AC.

Ф: Тогда возможны три случая, которые я изобразил на рисунках 26, *а–в*.

У: Правильно. Как вы думаете, для какого случая легче доказать равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$?

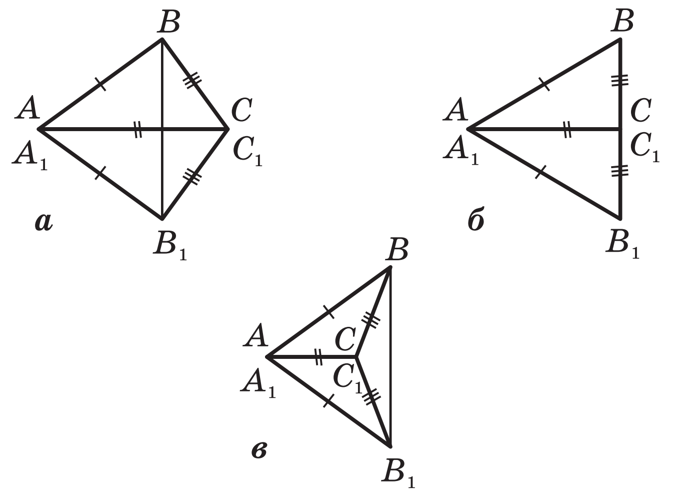


Рис. 26

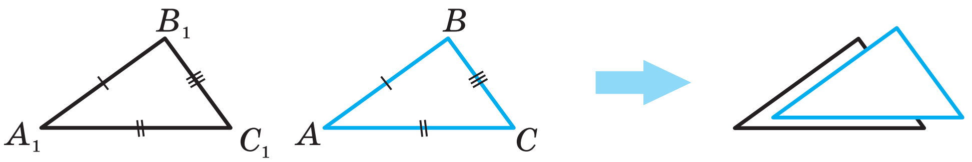
Ф: Мне кажется, для случая, изображённого на рисунке 26, *б*. В этом случае треугольник B_1AB равнобедренный, поэтому углы B и B_1 при его основании равны. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников.

У: Согласен. Для случаев, изображённых на рисунках 26, *а* и 26, *в*, можно воспользоваться теми же соображениями.

***46.** Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ на рисунках 26, *а* и 26, *в* равны.

К: Давайте третий признак равенства треугольников тоже представим в виде схемы (рис. 27).

Третий признак равенства треугольников



$A_1B_1 = AB$; $A_1C_1 = AC$; $B_1C_1 = BC$ $\quad\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$

Рис. 27

Ф: Добавим в эту схему и свойства равных треугольников (рис. 28).

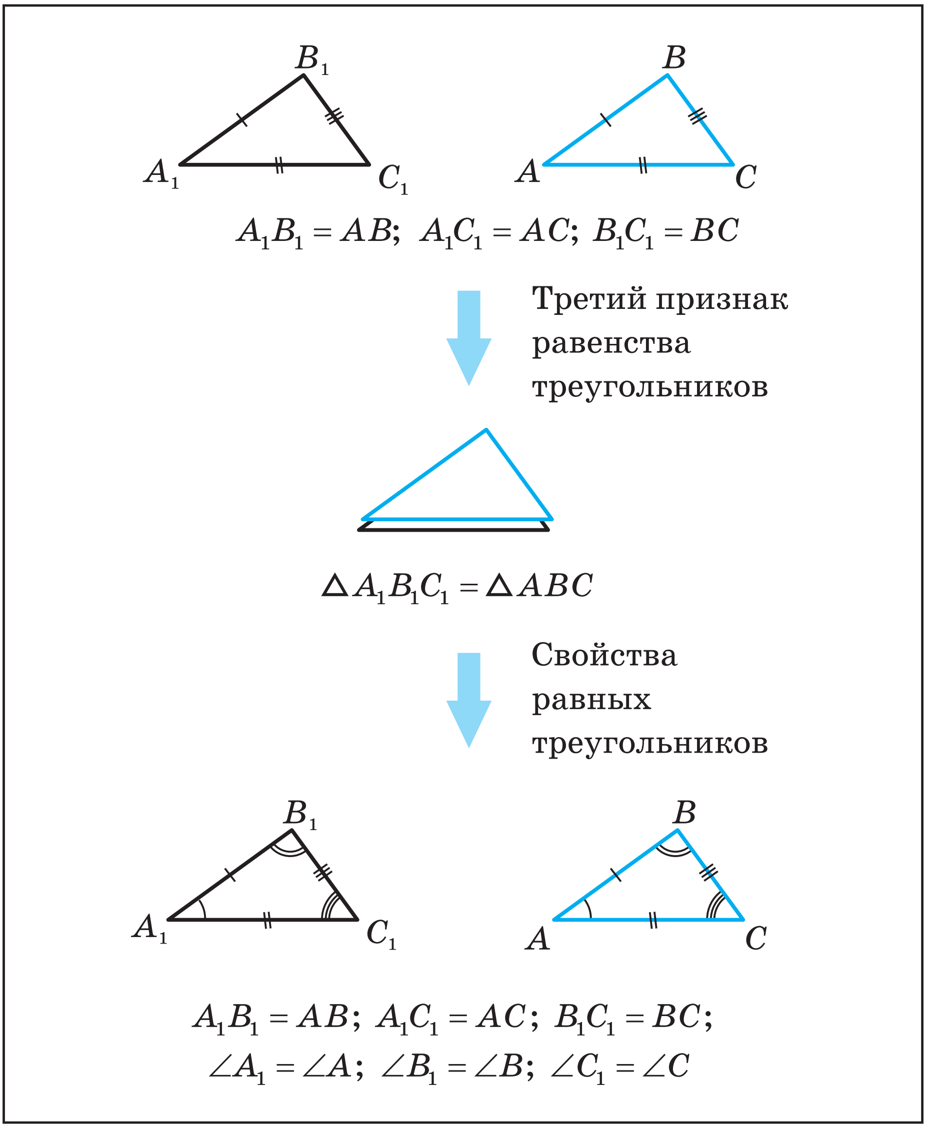


Рис. 28

47. Какую информацию можно извлечь из рисунка 29?

**48.* Сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника. Равны ли эти треугольники?

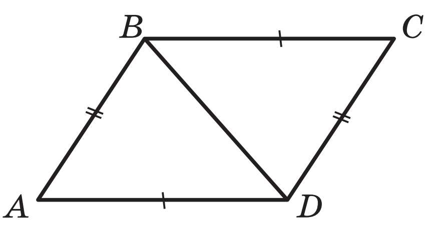


Рис. 29

****49.** Равны ли равнобедренные треугольники, если основание и периметр одного треугольника соответственно равны основанию и периметру другого треугольника?

*****50.** Равны ли равнобедренные треугольники, если боковая сторона и медиана, проведённая к этой стороне, одного треугольника соответственно равны боковой стороне и медиане, проведённой к этой стороне, другого треугольника?

*****51.** Равны ли треугольники, если две стороны и лежащая между ними медиана одного треугольника соответственно равны двум сторонам и лежащей между ними медиане другого треугольника?

ТРЕУГОЛЬНИК — ЖЁСТКАЯ ФИГУРА

У: Соединим концы двух твёрдых стержней так, чтобы стержни могли свободно поворачиваться вокруг точки их соединения (такое соединение называют *шарнирным*). Будет ли такая конструкция стержней иметь *постоянную* форму?

К: Нет, потому что угол между стержнями можно произвольно изменять (рис. 30).

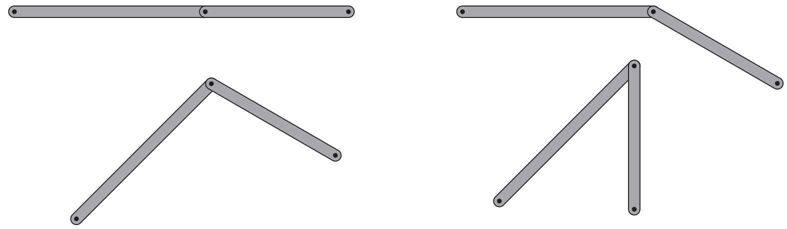


Рис. 30

У: Правильно. А теперь — тоже шарнирно — соединим концы *трёх* стержней (рис. 31). Мы получим *треугольник* из стержней. Можно ли изменить форму такой конструкции?

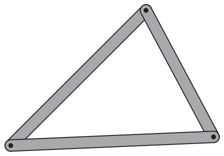


Рис. 31

Ф: Я думаю, что нельзя. Если, конечно, не ломать стержней.

К: Почему?

Ф: Если бы можно было изменить форму этой конструкции, *не изменяя длин стержней*, то получился бы *другой треугольник с такими же сторонами* — но это противоречит третьему признаку равенства треугольников.

У: Правильно. Поэтому говорят, что *треугольник — жёсткая фигура*. Жёсткость треугольника широко используют в строительстве и инженерном деле.

ВСТРЕЧА 15

6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

У: Сегодня мы начнём строить геометрические фигуры, используя *только* циркуль и линейку без делений. С их помощью мы сможем, например, разделить отрезок пополам, а также построить перпендикуляр к отрезку.

К: Без линейки с делениями и без угольника?

У: Без!

СЕРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ОТРЕЗКУ

У: «Волшебной палочкой» наших построений будет тот замечательный факт, что биссектриса, высота и медиана, проведённые к основанию равнобедренного треугольника, *совпадают* (рис. 32).

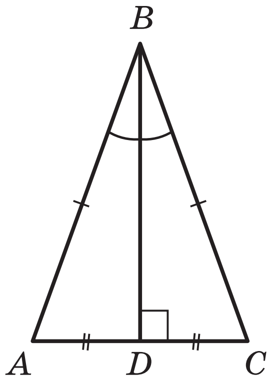


Рис. 32

К: А как можно использовать этот замечательный факт?

У: Если мы построим *любой* из этих трёх отрезков (медиану, высоту или биссектрису), то тем самым мы *одновременно построим и два других отрезка*.

Ф: Это и правда замечательно!

У: Для наших построений будет полезно новое понятие.

Прямую, перпендикулярную отрезку и проходящую через его середину, называют *серединным перпендикуляром* к этому отрезку.

На рисунке 33 изображён серединный перпендикуляр d к отрезку AC.

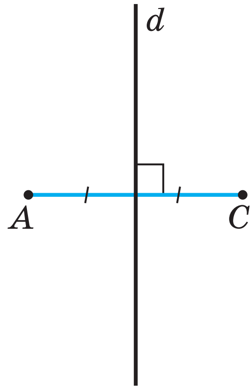


Рис. 33

***52.** Докажите, что биссектриса, высота и медиана равнобедренного треугольника, проведённые к его основанию, лежат на серединном перпендикуляре к основанию треугольника.

У: Вот две *взаимно обратные* теоремы о серединном перпендикуляре.

***53.** Докажите, что

если точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку, то она равноудалена от его концов, то есть находится на равных расстояниях от них (рис. 34).

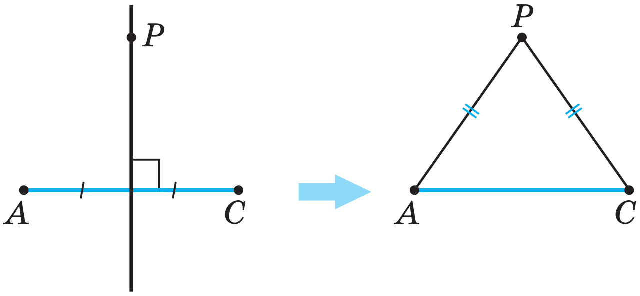


Рис. 34

***54.** Докажите, что

если точка равноудалена от концов отрезка (находится на равных расстояниях от них), то она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку (рис. 35).

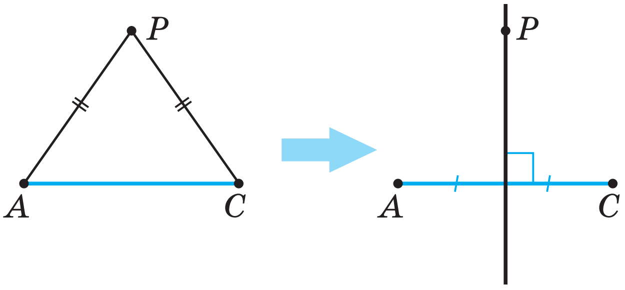


Рис. 35

КАК ПОСТРОИТЬ СЕРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ДАННОМУ ОТРЕЗКУ?

К: А как *построить* серединный перпендикуляр к отрезку?

У: Рассмотрим построение серединного перпендикуляра к отрезку AB (рис. 36).

Рис. 36

Начнём с того, что проведём циркулем дуги окружностей радиуса AB с центрами в точках A и B (рис. 37). Точки пересечения этих окружностей обозначим C и D...

Ф: Мне кажется, что серединный перпендикуляр к отрезку AB — это прямая CD!

К: Это можно доказать! Проведём прямую CD и отрезки AC, BC, AD, BD (рис. 38). Эти отрезки имеют *одинаковую длину*, равную AB...

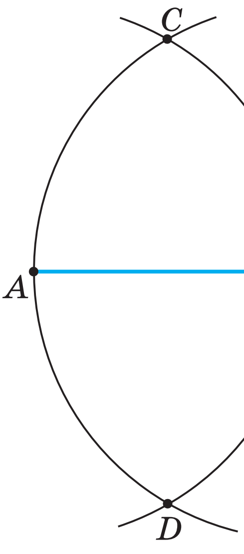


Рис. 37

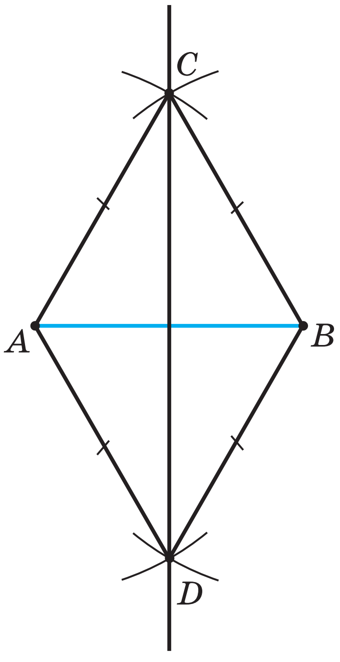


Рис. 38

***55.** Докажите, что прямая CD на рисунке 38 — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

К: Построив серединный перпендикуляр к отрезку, мы тем самым нашли и середину этого отрезка. Обозначим её O (рис. 39).

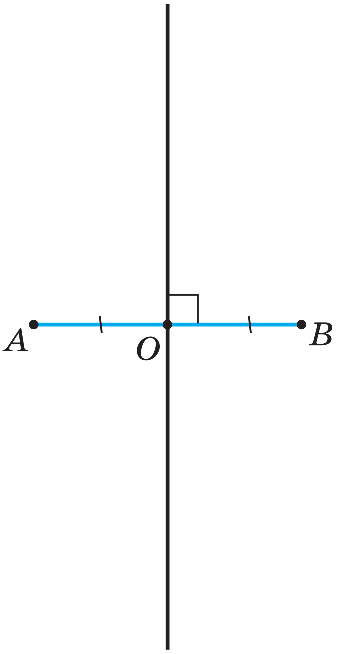


Рис. 39

КАК ПОСТРОИТЬ ПРЯМУЮ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНУЮ ДАННОЙ ПРЯМОЙ И ПРОХОДЯЩУЮ ЧЕРЕЗ ЗАДАННУЮ ТОЧКУ?

У: Рассмотрим сначала случай, когда заданная точка A не лежит на данной прямой m. На рисунках 40, *а–в* представлены этапы этого построения.

***56.** Опишите изображённые на рисунках 40, *а–в* этапы построения прямой, перпендикулярной прямой m и проходящей через точку A, не лежащую на этой прямой. Обоснуйте предложенное построение.

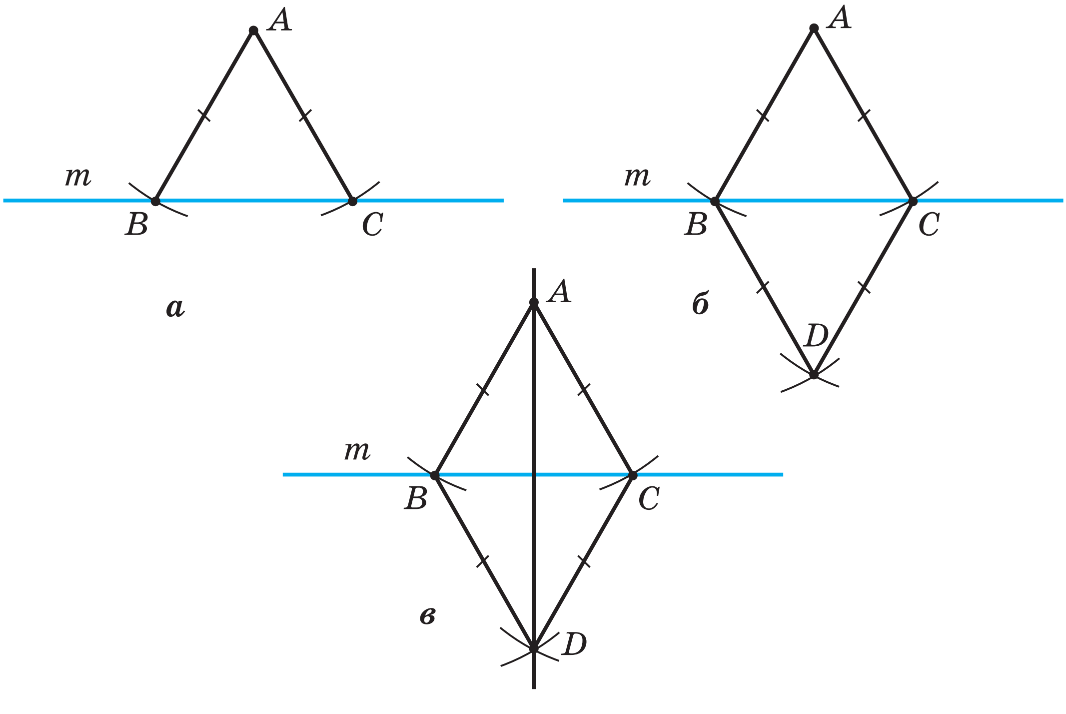


Рис. 40

У: Построим теперь прямую, перпендикулярную прямой m и проходящую через точку A на этой прямой.

***57.** Опишите изображённые на рисунках 41, *а–в* этапы построения прямой, перпендикулярной прямой m и проходящей через точку A на этой прямой. Обоснуйте предложенное построение.

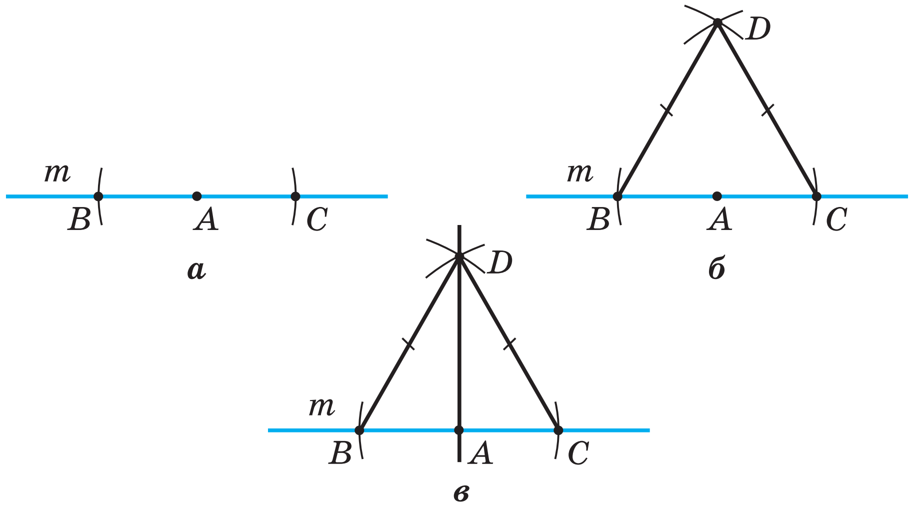


Рис. 41

КАК ПОСТРОИТЬ БИССЕКТРИСУ УГЛА?

***58.** Опишите этапы построения биссектрисы угла A (рис. 42, *а–в*). Обоснуйте предложенное построение.

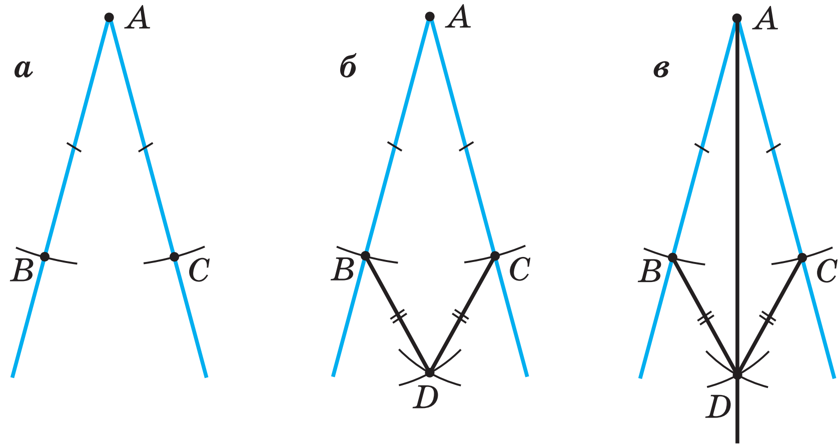


Рис. 42

ВСТРЕЧА 16

ЧТО МЫ УЗНАЛИ?

Ученикам всего класса предлагается, используя рисунок 43, формулировать основные утверждения главы (определения, аксиомы, теоремы). Победа (и поощрительная оценка по усмотрению учителя) присуждается тем ученикам, которые проявили наибольшую активность в игре, а также отдельно ученику, после которого никто не смог ничего добавить в течение оговоренного промежутка времени (например, полминуты или минута).

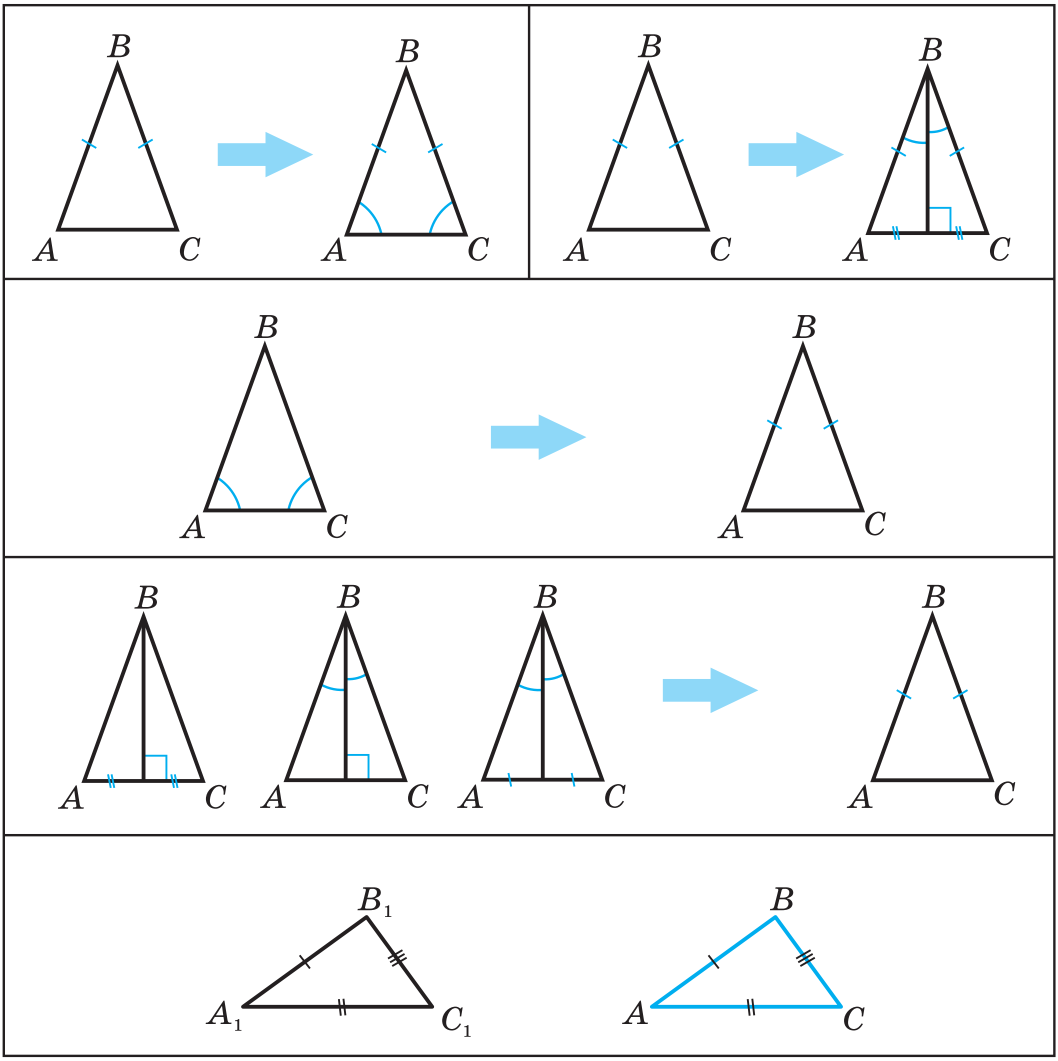


Рис. 43

7. СТАВИМ ВОПРОСЫ К УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ

У: Какие вопросы можно поставить по рисунку 44?

К: Равны ли треугольники ACF и BCF на рисунке 44?

**59. Ответьте на вопрос Кристины.

Ф: Являются ли треугольники ACB и AFB на рисунке 44 равнобедренными?

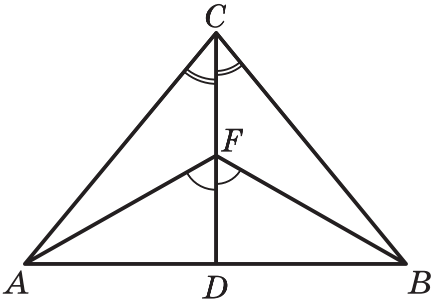


Рис. 44

*60. Ответьте на вопрос Фанта.

К: Равны ли отрезки AD и BD на рисунке 44?

*61. Ответьте на вопрос Кристины.

Ф: Есть ли на рисунке 44 перпендикулярные отрезки?

*62. Ответьте на вопрос Фанта.

К: Какие ещё две пары равных треугольников есть на рисунке 44?

*63. Ответьте на вопрос Кристины.

У: Предлагаю следующий рисунок.

В треугольнике ABC биссектриса AD и медиана BM перпендикулярны (рис. 45). Кроме того, $DM \perp AC$. Какие вопросы можно поставить?

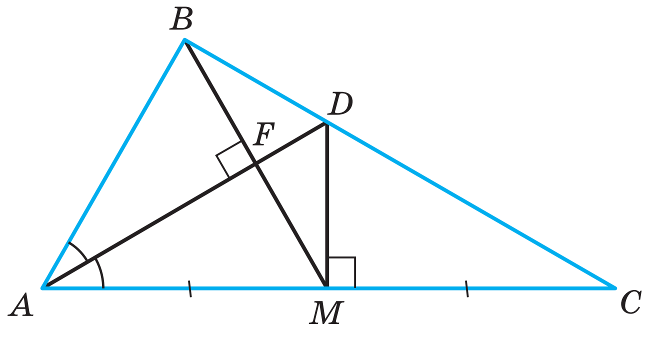


Рис. 45

Ф: Есть ли на рисунке 45 равнобедренные треугольники?

К: И если да, то сколько их?

**64. Ответьте на вопросы Фанта и Кристины.

К: Отметим на чертеже равные стороны и углы (рис. 46).

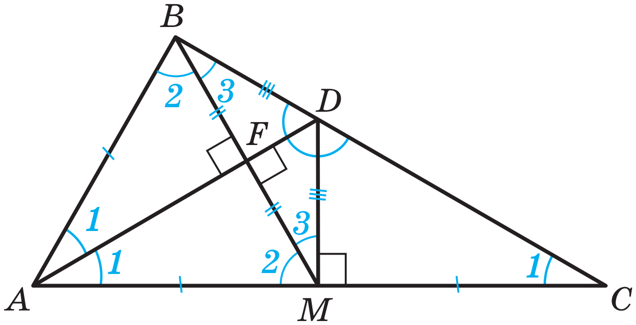


Рис. 46

Ф: Чему равен каждый из углов BDA, ADM и MDC на рисунке 45?

**65. Ответьте на вопрос Фанта.

К: Чему равен угол ABC на рисунке 46?

***66. Ответьте на вопрос Кристины.

СЕКРЕТ РЕШЕНИЯ ТРУДНЫХ ЗАДАЧ

К: Если бы к рисунку 45 был сразу задан вопрос: чему равен угол ABC, то ответить на него было бы непросто...

Ф: Не видно было бы даже, как подступиться к ответу!

У: Я подвожу вас к важному выводу: чтобы решить трудную задачу, надо не пытаться найти прямой ответ на поставленный в задаче вопрос, а начать *исследовать условие* задачи. Находя знакомые фигуры по их признакам и используя их свойства, мы *расширяем область известного*, извлекая всё больше и больше информации, скрытой в условии. И в расширяющуюся область известного довольно скоро попадёт и ответ на поставленный вопрос: это ведь просто один из элементов информации, скрытой в условии.

Ф: Если задача трудная, то вопрос задачи находится далеко «в стороне» от условия (рис. 47)...

К: И поэтому не видно связи между условием задачи и вопросом!

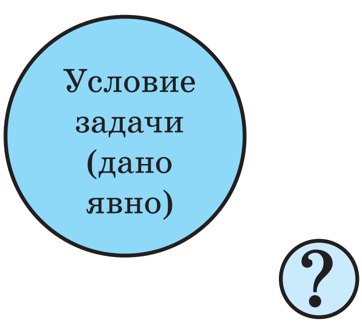


Рис. 47

У: Действительно, если задача трудная, то в первом слое извлечённой информации ответа на вопрос задачи обычно нет (рис. 48).

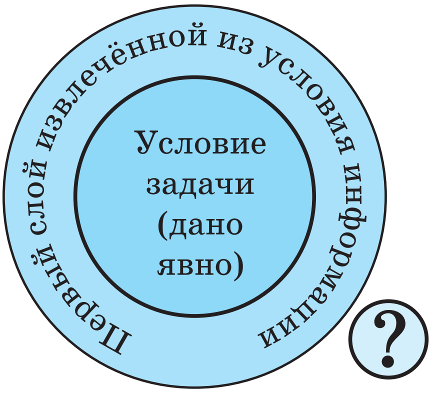


Рис. 48

Но если *продолжать расширять область известного*, используя в том числе и *уже извлечённую* информацию, то в конце концов ответ на вопрос задачи попадёт в область известного. Выдам вам секрет: ответы на вопросы большинства трудных школьных задач находятся во втором или максимум третьем слое извлечённой информации (рис. 49).

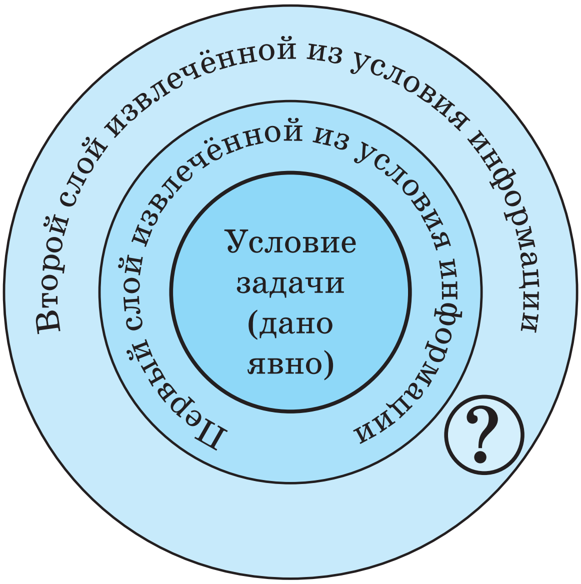


Рис. 49

КАК РОЖДАЮТСЯ ЗАДАЧИ?

У: Используя извлечённую из условия скрытую информацию, можно *ставить новые* вопросы к *тому же* условию (рис. 50). Так рождаются *новые* задачи.

Рис. 50

Ф: Давайте попробуем!

У: Хорошо. Какие вопросы можно задать по рисунку 51?

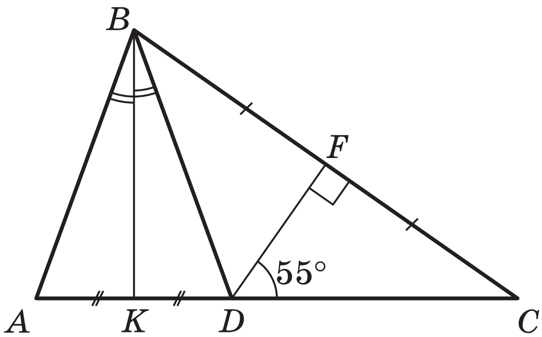


Рис. 51

К: Чему равен угол BDF на рисунке 51?

***67.** Ответьте на вопрос Кристины.

Ф: Чему равен угол BDA на рисунке 51?

***68.** Ответьте на вопрос Фанта.

К: Чему равен угол BAD на рисунке 51?

***69.** Ответьте на вопрос Кристины.

****70.** Какие вопросы можно задать по каждому из рисунков 52, *а–в*? Ответьте на свои вопросы.

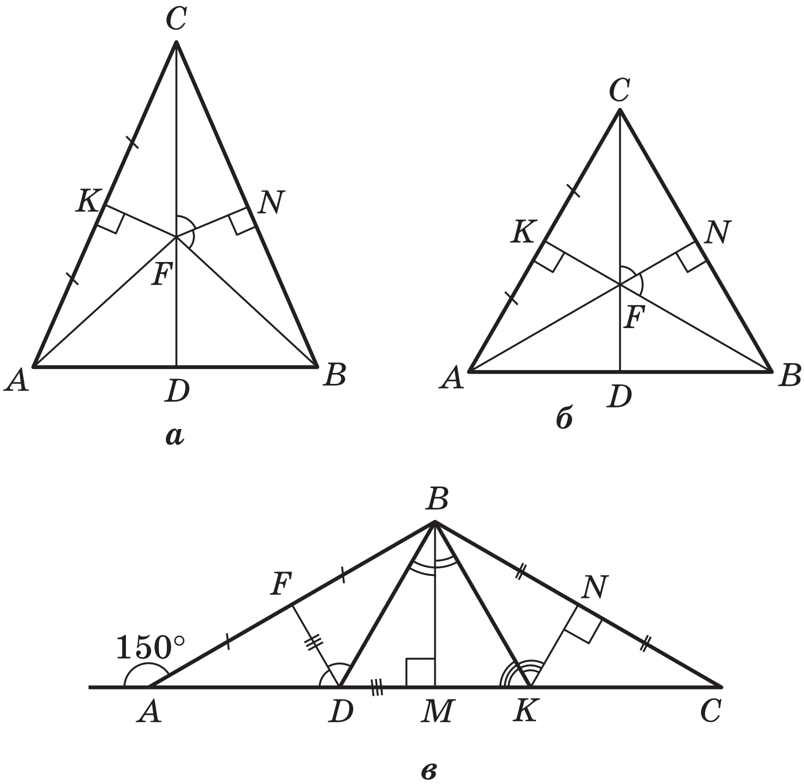


Рис. 52

****71.** Какие вопросы можно задать по каждому из рисунков 53, *а–б*? Ответьте на свои вопросы.

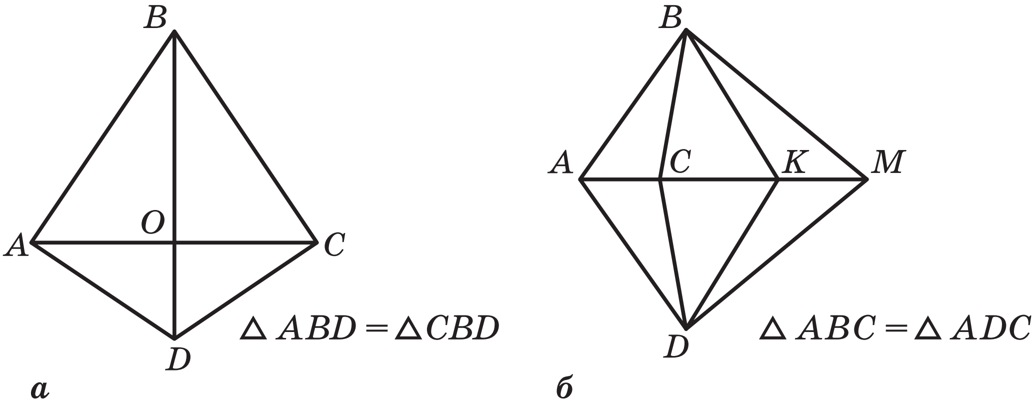
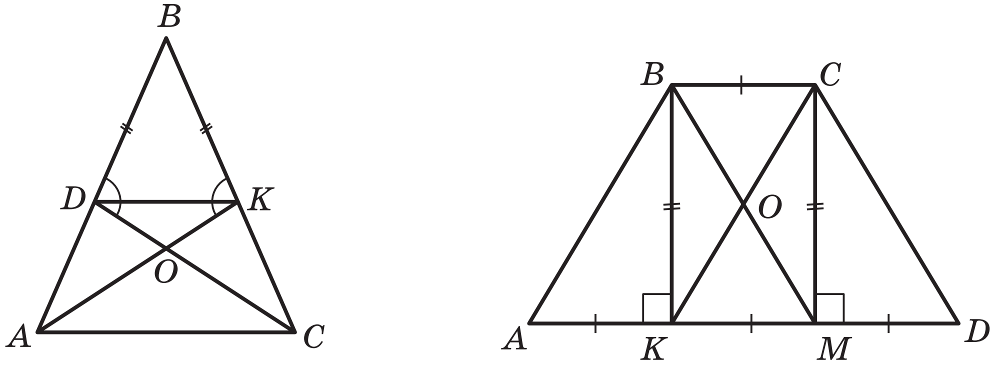


Рис. 53

72. Какие вопросы можно задать по каждому из рисунков 54, *а–б*? Ответьте на свои вопросы.



а *б*

Рис. 54

73. Начертите три разносторонних треугольника, в первом из которых все углы острые, во втором — один угол прямой, а в третьем — один угол тупой. С помощью циркуля и линейки без делений постройте:

а) все биссектрисы каждого треугольника;
б) все медианы каждого треугольника;
в) все высоты каждого треугольника;
г) серединные перпендикуляры ко всем сторонам каждого треугольника.

***74.** Начертите произвольный угол A и отметьте произвольную точку B внутри этого угла (рис. 55). С помощью циркуля и линейки без делений постройте прямую, которая проходит через точку B и пересекает стороны угла A под одинаковыми углами.

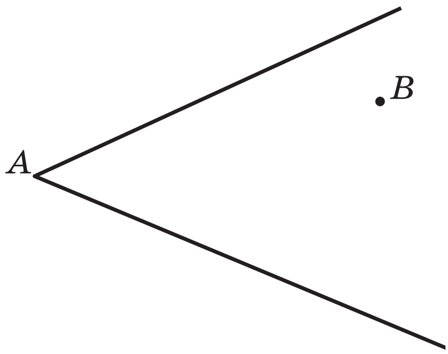


Рис. 55

***75. На рисунках 56, *а–в* схематически изображены небольшие посёлки A и B, а также прямая железная дорога. Перенесите рисунки в тетрадь и определите для каждого случая графически: где надо построить железнодорожную станцию C так, чтобы она находилась на равных расстояниях от посёлков A и B?

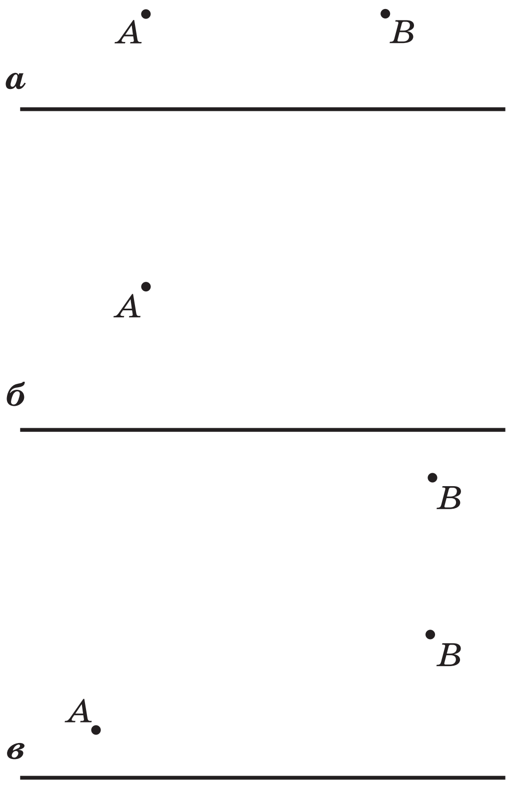


Рис. 56

***76. На рисунке 57 схематически изображены три города B, C, D. Перенесите рисунки в тетрадь и определите графически: где надо построить аэропорт A так, чтобы он находился на равных расстояниях от всех трёх городов?

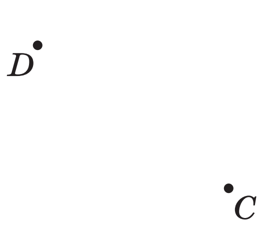


Рис. 57

Глава 4. Равнобедренный треугольник

6. Медиана равнобедренного треугольника является также его биссектрисой.

7. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, совпадает с медианой и биссектрисой.

9. Воспользуйтесь тем, что медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является также биссектрисой и высотой.

11. Докажите, что данный треугольник равнобедренный, причём медиана проведена к основанию.

12. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является также медианой и высотой. Поэтому периметр треугольника ABD равен половине периметра треугольника ABC плюс длина высоты, проведённой основанию AC.

15. Воспользуйтесь тем, что все углы равностороннего треугольника равны, а также первым признаком равенства треугольников.

18. Воспользуйтесь тем, что углы при основании равнобедренного треугольника равны, а также вторым признаком равенства треугольников.

19. Воспользуйтесь тем, что углы при основании равнобедренного треугольника равны, а также первым признаком равенства треугольников.

20. Воспользуйтесь первым признаком равенства треугольников.

21. Воспользуйтесь тем, что углы при основании равнобедренного треугольника равны и вторым признаком равенства треугольников.

22. Воспользуйтесь тем, что в равнобедренном треугольнике медиана, высота и биссектриса, проведённые к основанию, совпадают, а также первым признаком равенства треугольников.

23. Воспользуйтесь тем, что в равнобедренном треугольнике медиана, высота и биссектриса, проведённые к основанию, совпадают, а также вторым признаком равенства треугольников.

29. Для доказательства равенства $\triangle AMN = \triangle CMB$ воспользуйтесь первым признаком равенства треугольников. Используя это равенство треугольников и уже доказанный признак равнобедренного треугольника, можно доказать, что треугольник NAB — равнобедренный. Затем, используя свойства равнобедренного треугольника, можно доказать, что $\triangle AMN = \triangle AMB$ по второму признаку равенства треугольников.

30. Воспользуйтесь свойствами и признаками равнобедренного треугольника.

31. Воспользуйтесь признаками равнобедренного треугольника.

32. Воспользуйтесь признаком равнобедренного треугольника по двум углам и свойством биссектрисы равнобедренного треугольника, проведённой к основанию.

33. Воспользуйтесь свойством углов равностороннего треугольника, первым признаком равенства треугольников и свойствами равных треугольников.

34. Воспользуйтесь одним из признаков равнобедренного треугольника.

35. Воспользуйтесь одним из признаков равнобедренного треугольника, а также свойством медианы равнобедренного треугольника, проведённой к основанию.

37. Найдите равнобедренный треугольник и воспользуйтесь его свойствами.

45. Сформулируем исходную теорему так: «Если треугольник равнобедренный, то его можно разбить на два равных треугольника». Тогда обратную теорему можно сформулировать так: «Если треугольник можно разбить на два равных треугольника, то он равнобедренный».

46. Воспользуйтесь тем, что треугольники B_1AB и B_1CB — равнобедренные, а также тем, что углы при основании равнобедренного треугольника равны.

47. Воспользуйтесь третьим признаком равенства треугольников и свойствами равных треугольников.

48. Воспользуйтесь третьим признаком равенства треугольников.

49. Воспользуйтесь третьим признаком равенства треугольников.

50. Рассмотрите треугольник, сторонами которого являются боковая сторона данного равнобедренного треугольника, медиана, проведённая к боковой стороне, и половина боковой стороны. Далее воспользуйтесь третьим признаком равенства треугольников, чтобы доказать, что у двух данных треугольников равны углы между боковыми сторонами. Затем воспользуйтесь первым признаком равенства треугольников, чтобы доказать равенство данных треугольников.

51. Воспользуйтесь «удвоением медианы», а также третьим признаком равенства треугольников.

52. Воспользуйтесь тем, что медиана проходит через середину основания, высота перпендикулярна основанию, а биссектриса совпадает с медианой и высотой.

53. Воспользуйтесь первым признаком равенства треугольников или одним из признаков равнобедренного треугольника.

54. Воспользуйтесь тем, что медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является также его высотой.

55. Воспользуйтесь тем, что треугольники DAC и DBC равны по третьему признаку равенства треугольников, а также тем, что биссектриса равнобедренного треугольника (например, треугольника ACB) совпадает с медианой и высотой.

56. Данное построение полностью аналогично рассмотренному выше построению серединного перпендикуляра к отрезку BC.

57. Сначала начертите две дуги окружности *одинакового* радиуса с центром в точке A и отметьте точки B и C пересечения этих дуг с прямой m (рис. 41, *а*). Данное построение аналогично рассмотренному выше построению серединного перпендикуляра к отрезку BC.

58. Воспользуйтесь третьим признаком равенства треугольников.

59. Воспользуйтесь тем, что углы, смежные с равными углами, тоже равны, а также вторым признаком равенства треугольников.

60. Воспользуйтесь равенством треугольников ACF и BCF.

61. Воспользуйтесь тем, что биссектриса, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является также медианой.

62. Воспользуйтесь тем, что биссектриса, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является также высотой.

63. Рассмотрите треугольники ACD и BCD, а также треугольники AFD и BFD.

64. Воспользуйтесь признаками равнобедренного треугольника.

66. Докажите сначала, что треугольники ABD и AMD равны, а также тем, что $DM \perp AC$.

67. Воспользуйтесь тем, что DF — одновременно высота и медиана треугольника BDC.

68. Воспользуйтесь тем, что угол ADC — развёрнутый.

69. Воспользуйтесь тем, что BK — биссектриса и медиана треугольника ABD. А потом свойством равнобедренного треугольника.

73. Проверка правильности построения: все биссектрисы должны пересечься в одной точке, все медианы должны пересечься в одной точке, все высоты или их продолжения должны пересечься в одной точке, все серединные перпендикуляры должны пересечься в одной точке.

74. Постройте сначала биссектрису AD угла A, а затем проведите перпендикуляр к AD, проходящий через точку B. Докажите, что он и будет искомой прямой.

75. Воспользуйтесь тем, что все точки, равноудалённые от двух заданных точек, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку с концами в этих точках.

76. Воспользуйтесь тем, что все точки, равноудалённые от двух заданных точек, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку с концами в этих точках.

Глава 4. Равнобедренный треугольник

1. AB и BC. **2.** Четыре равнобедренных треугольника: ABC, ADC, DAB и DCB. **5.** Треугольники ABD и CBD равны по первому признаку равенства треугольников. **6.** 28°. **9.** $\angle CBD = 60°$, $\angle BDC = 90°$. $\angle BCD = 30°$. **10.** а) 90°. б) 50°.

11. Данный треугольник является равнобедренным, причём данная медиана проведена к основанию. Отсюда следует, что она совпадает с биссектрисой и высотой, то есть она делит пополам угол, из которого выходит, а также перпендикулярна основанию.

12. 5 см. **13.** 10 см. **15.** Да. **16.** Да.

17. Запишем для каждого случая равенство соответственных сторон равных треугольников, используя порядок букв в записи равенства треугольников в условии. Получим: а) $AB = CB$, откуда следует, что треугольник ABC равнобедренный с боковыми сторонами AB и BC; б) $AB = BC$, $BC = CA$, $AC = BA$, откуда следует, что все три стороны треугольника равны.

26. Утверждение, обратное теореме о вертикальных углах: «если углы равны, то они вертикальные». Это неверно: если углы равны, то они не обязательно вертикальные — это могут быть, например, углы при основании равнобедренного треугольника.

27. Если медиана BM треугольника ABC перпендикулярна стороне AC, то по первому признаку равенства треугольников $\triangle AMB = \triangle CMB$. Отсюда следует, что $AB = BC$.

28. Если биссектриса BD треугольника ABC перпендикулярна стороне AC, то по второму признаку равенства треугольников $\triangle ADB = \triangle CDB$. Отсюда следует, что $AB = BC$.

30. Высота по условию совпадает с медианой, проведённой тоже к стороне AC, поэтому треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC. Отсюда следует, что высота и медиана, проведённые к стороне AC, равны 12 см. Доказав, что биссектрисы, проведённые к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны, получаем, что биссектриса угла C также равна 15 см.

33. Является. **34.** Является. **35.** $AB = BC = 16$ см, $AC = 10$ см.

36. 70 см. **39.** а) 28 см. б) 66°.

45. Пусть треугольник ABC разбивается отрезком BD на два равных треугольника, тогда сторона BD у этих треугольников общая (рис. 5). В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, поэтому $\angle A = \angle C$. Отсюда следует, что треугольник ABC равнобедренный с основанием AC.

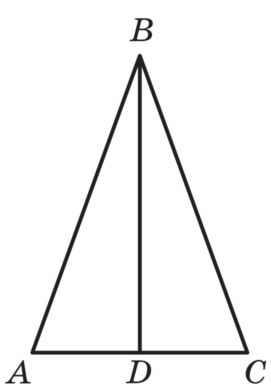


Рис. 5

47. Треугольники ABD и CDB равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда следует равенство соответственных углов этих треугольников: $\angle A = \angle C$, $\angle ABD = \angle CDB$, $\angle ADB = \angle CBD$. **48.** Равны. **49.** Равны. **50.** Равны. **51.** Равны.

64. Треугольник BAM — равнобедренный, поскольку его биссектриса совпадает с высотой. Отсюда следует, что и треугольник BDM равнобедренный, поскольку DF — одновременно его медиана и высота. Треугольник ADC также равнобедренный, поскольку KD — одновременно его медиана и высота.

65. Углы BDA и MDA равны, поскольку DF — биссектриса равнобедренного треугольника BDM, а углы ADM и CDM равны, поскольку DM — биссектриса равнобедренного треугольника ADC. Сумма этих трёх равных углов равна $180°$, поэтому каждый из них равен $60°$.

66. Треугольники ABD и AMD равны по любому (!) из трёх признаков равенства треугольников. Отсюда следует, что $\angle ABC = \angle AMD$, а по условию $DM \perp AC$. Следовательно $\angle ABC = 90°$.

67. $\angle BDF = 55°$. **68.** $\angle BDA = 70°$. **69.** $\angle BAD = 70°$.

75. Постройте серединный перпендикуляр к отрезку AB. Станция C должна находиться в точке пересечения этого перпендикуляра с дорогой (рис. 6, *а*—*в*).

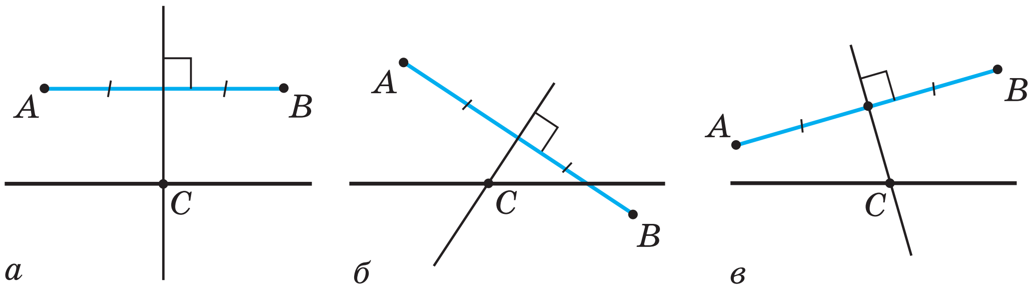


Рис. 6

76. Точка A должна лежать на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам DB, BC и DC (рис. 7). То, что эти серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке, мы докажем в последнем параграфе.

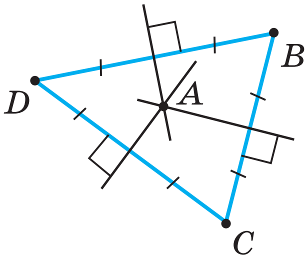


Рис. 7

СОДЕРЖАНИЕ