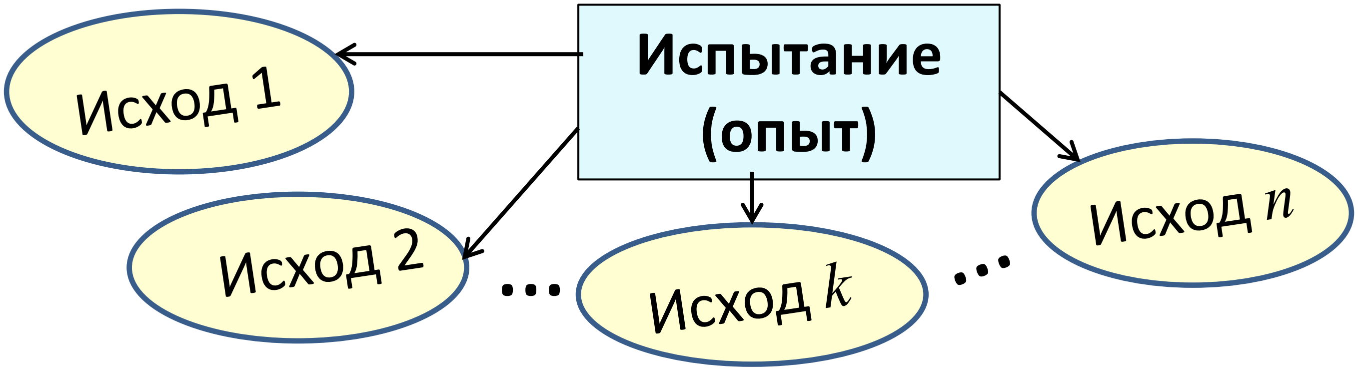
Работа с теоретическими конспектами по математике в старшей школе.

Решение вероятностных задач

Основные вопросы

- Основные понятия, правила, формулы.
- Алгоритм решения вероятностной задачи.
- Классическое определение вероятности (формула).
- Геометрическая вероятность.
- Вероятностные задачи как текстовые на смеси и сплавы.
- Сумма и произведение вероятностей.
- Независимые события.
- Зависимые события.
- Формула Бернулли.
- Основные схемы решения задач.

Классическое определение вероятности



Всего n всевозможных исходов. Исходы 1, 2, …, k $(k \le n)$ благоприятствуют событию A.

Вероятность наступления события А:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Алгоритм решения

Алгоритм	**Решение**
1. Назовём и сформулируем событие А	**Событие А** «Петя и Коля делают уборку»
2. Определяем число всевозможных исходов n	$n = C_6^3 = \dfrac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = 20$
3. Находим число исходов, благоприятствующих событию А: *n*(А)	$n(A) = 4$
4. Вычислим вероятность по формуле: $p(A) = \dfrac{n(A)}{n}$	$p(A) = \dfrac{4}{20} = 0{,}2$ Ответ: 0,2.

Задача 1.

В группе 6 человек, среди них Петя и Коля. Трое из группы делают уборку. Какова вероятность, что Петя и Коля делают уборку?

Геометрическая вероятность

Задача 2. В круг радиуса 4 вписан квадрат. Какова вероятность, что брошенная наудачу в круг точка не окажется в квадрате?

Решение. Площадь круга $S_{круга} = 16\pi$. Площадь квадрата $S_{квадрата} = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32$

Тогда площадь частей круга вне квадрата $S = 16\pi - 32 = 16(\pi - 2)$. Это множество точек круга, благоприятствующих событию А «Точка круга, не попавшая в квадрат».

Искомая вероятность: $P = \frac{S}{S_{круга}} = \frac{16\left(\pi - 2\right)}{16\pi}$

Ответ: $\frac{\pi - 2}{\pi}$

Задачи, схожие с задачами на смеси и сплавы

<u>Задача 3.</u> Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая – 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая – 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение. Пусть *x* – число всех стекол в магазине, тогда 0,45х стекол – с 1-й фабрика, из них брак составляет $0{,}03 \cdot 0{,}45x$ стекол.
Со 2-й фабрики 0,55*x* стекол, брак – $0{,}01 \cdot 0{,}55x$ стекол.
Всего бракованных стекол: $0{,}03 \cdot 0{,}45x + 0{,}01 \cdot 0{,}55x$
Вероятность считаем по определению:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n}, \quad P = \frac{0{,}03 \cdot 0{,}45x + 0{,}01 \cdot 0{,}55}{x} = 0{,}019.$$

Основные понятия

- Несовместные события
- Полная группа событий
- Достоверное событие
- Невозможное событие
- Противоположные события
- Независимые события
- Зависимые события

Формулы комбинаторики

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad P_n = n!$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad \overline{A}_n^k = n^k$$

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Сумма несовместных событий

ЗАДАЧА 4.

В пакете лежат конфеты: 7 конфет «Белочка», 8 конфет «Ромашка», и 5 конфет «Мишка"». Ваня, не глядя в пакет, берёт одну конфету. Какова вероятность, что Ване не попалась «Белочка»?

ЗАДАЧА 5.

Завтра ожидается дождь с вероятностью 0,4; будет целый день пасмурно (без дождя) с вероятностью 0,5. Но возможно, что завтра целый день будет солнечно.
Какова вероятность, что завтра выглянет солнышко?

Произведение независимых событий

ЗАДАЧА 6.

В магазине два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен независимо от другого автомата с вероятностью 0,05. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение. Полная группа событий - 4 исхода:

Схема

	1 автомат			2 автомат
1.	0,95	+	+	0,95
2.	0,95	+	−	0,05
3.	0,05	−	+	0,95
4.	0,05	−	−	0,05

1 способ: Вероятность события А: «хотя бы один автомат работает» равна сумме вероятностей элементарных событий 1,2 и 3

$$P(A) = 0{,}95 \cdot 0{,}95 + 0{,}05 \cdot 0{,}95 + 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 0{,}9975.$$

2 способ. Используем полную группу событий:

$$P(A) = 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}9975$$

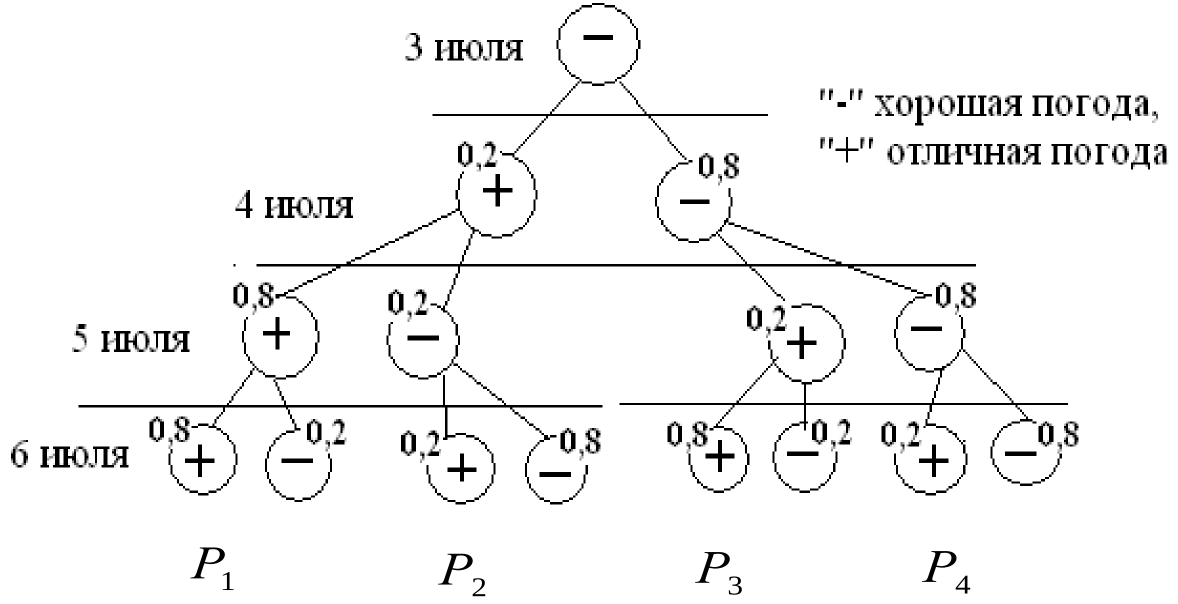
Произведение независимых событий

ЗАДАЧА 7.

В волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, что и сегодня. Сегодня 3 июля погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

«Дерево» всевозможных исходов

Вероятность события А: «6 июля отличная погода» вычислим по формуле суммы вероятностей.



$$P_1 = 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8$$
$$P_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2$$
$$P_3 = 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8$$
$$P_4 = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2$$
$$P(A) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$
$$P(A) = 0{,}392$$

задачи с игральным кубиком

ЗАДАЧА 8. (Ларин, в. 256)

В случайном эксперименте игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что разность выпавших очков будет меньше двух. Ответ округлите до сотых.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Решение.

Пусть событие А «разность выпавших очков меньше 2-х».

Составим таблицу всевозможных исходов - разностей выпавших очков.

Число ячеек с цифрами 0 и 1 (разность меньше двух).

n (А)=16. Вероятность события А равна:

$$P = \frac{16}{36} \approx 0,44$$

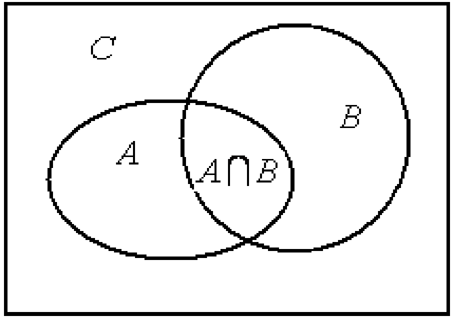
Вероятность зависимых событий

Задача 9.

В торговом центре два автомата кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Схема

1 автомат		2 автомат	
1.	+	+	
2.	+	−	
3.	−	+	0,3
4.	−	− 0,012	



$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Вероятность зависимых событий

Задача 10 (Ларин, в. 285).

Профессор забоépítельного университета Аполлон Иванович подсчитал, что Сюзанна Зайцева отсутствует на его лекциях с вероятностью 0,7, а Виолетта Волкова – с вероятностью 0,8. Вероятность того, что обе девушки присутствуют на лекции равна 0,12. Какова вероятность, что на следующую лекцию не придёт ни Сюзанна, ни Виолетта?

Решение. Пусть Событие А – «Сюзанна не пришла на лекцию», событие В – «Виолетта не пришла на лекцию», тогда событие А+В – «хотя бы одной девушки нет на лекции (-+ или +- или - -)», событие АВ – «обеих девушек нет на лекции (- -)». Очевидно, события А и В зависимые. Известно, что р(А) = 0,7; р(В) = 0,8. Тогда р(А+В) = 1 – 0,12 = 0,88.

По формуле $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ находим:

P(AB)=0,7+0,8 – 0,88=0,62. Ответ: 0,62.

Вероятность зависимых событий

Решение задачи 10. Способ 1 (рассуждением). Пусть Событие А – «Сюзанна пришла на лекцию», событие В – «Виолетта пришла на лекцию», тогда событие А+В – «хотя бы одна девушка на лекции (-+ или +- или + +)», событие АВ – «обе девушки на лекции (+ +)». Очевидно, события А и В зависимые.

Из условия задачи: p(A)=1 – 0,7 = 0,3; p(B)=1 – 0,8 = 0,2 ; p(AB) = 0,12.

Полная группа событий состоит из 4-х исходов (элементарных событий):

(С+, В+); (С+, В-); (С-, В+) и (С-, В-), причём p(AB)=p(С+, В+)=0,12.

P(A) = p(С+, В+) + p(С+, В-)=0,3. Тогда p(С+,В-) = 0,3 – 0,12= 0,18.

P(B) = p(С+, В+) + p(С-, В+)=0,2. Тогда p(С-, В+) = 0,2 – 0,12 = 0,08.

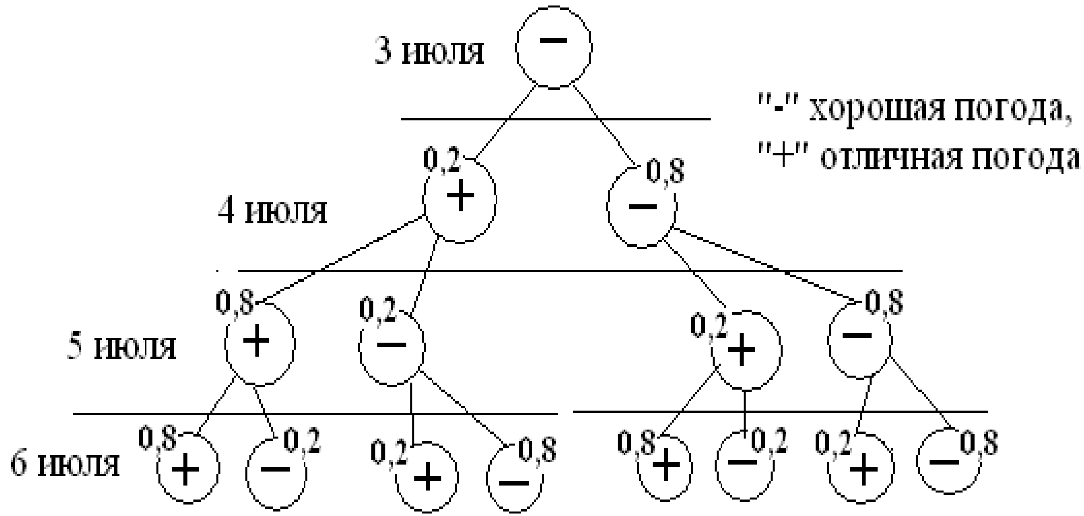
$P(A+B)=P($

Теперь вычислим искомую вероятность p(С-, В-).

p(С-, В-) = 1 – (0,12+0,08+0,18)=0,62.

Ответ: 0,62.

Вернёмся к «дереву»: бросание монеты



Задача 11. Симметрическую монету бросают 3 раза. Найдите вероятность события:

а) выпало ровно 2 орла.

б) во 2-м броске выпала решка.

в)выпало две решки подряд.

Формула Бернулли

Пусть в опыте вероятность события A равна ***p***, и опыт повторяется n раз, при этом каждый повторяемый опыт независим от остальных.
Тогда в этом сложном опыте вероятность события $A(k)$ – событие *A* произойдёт k раз $(k < n)$ равна $P_n(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$.

<u>**Задача 12**.</u> Симметрическую монету бросают 8 раз. Найдите вероятность того, что выпадет ровно два орла.
Решение. По формуле Бернулли:
n=8, k=2, p = q =0,5.
Ответ: 0,109375.

Задачи о стрельбе

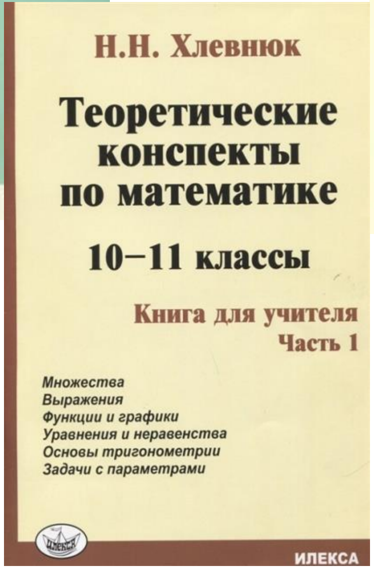
<u>Задача 13</u>. Биатлонист делает по мишени 5 выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле – 0,8. Найдите вероятность того, что он:

а) из пяти выстрелов попал в цель ровно 3 раза.
б) из пяти выстрелов попал в цель не менее 3-х раз.
в) первые три раза попал по мишени, а последние 2 раза промахнулся.
Г)……………

Основные вопросы

- Основные понятия, правила, формулы.
- Алгоритм решения вероятностной задачи.
- Классическое определение вероятности (формула).
- Геометрическая вероятность.
- Вероятностные задачи как текстовые на смеси и сплавы.
- Сумма и произведение вероятностей.
- Независимые события.
- Зависимые события.
- Формула Бернулли.
- Основные схемы решения задач.

Преподавание математики в школе. Методологический подход



Спасибо за внимание и сотрудничество.

Успехов в изучении и обучении!

Издательский дом
Первое сентября

Курсы
Первое сентября

Вебинары
Первое сентября

Открытый урок
Первое сентября

Школа цифрового века
Первое сентября

Наши социальные сети